

Cálculo Numérico

ECA / 4 créditos / 60 h

Introdução, Erros e Matlab

Ricardo Antonello

www.antonello.com.br

Conteúdo

- Erros na fase de modelagem
- Erros na fase de resolução
 - Erros de arredondamento
 - Erros de truncamento
 - Propagação de erros
- Matlab

Erros???

- Exemplo em Excel
- Informe a seguinte fórmula e veja o resultado
 $=1*(0,5-0,4-0,1)$

Relembrando...

- O Cálculo Numérico é uma metodologia para resolver problemas matemáticos por meio de uma máquina calculadora ou um computador, sendo de grande importância pois, embora os métodos analíticos usualmente nos forneçam a resposta em termos de funções matemáticas, existem problemas que não possuem solução analítica. Mas, mesmo nestes casos podemos obter uma solução numérica para o problema.
- Uma solução via Cálculo Numérico é um conjunto de dados numéricos que fornecem uma aproximação para a solução exata do problema, aproximação esta que pode ser obtida em grau crescente de exatidão.

Processo de solução de um sistema físico por meio de métodos numéricos



A escolha do método mais eficiente deve envolver:

- Precisão desejada para os resultados;
- Capacidade do método em conduzir aos resultados desejados (velocidade de convergência);
- Esforço computacional despendido (tempo de processamento, economia de memória necessária para a resolução).

A solução numérica envolve:

- A elaboração de um algoritmo, que é a descrição seqüencial dos passos que caracterizam um método numérico;
- A codificação do programa, quando implementamos o algoritmo numa linguagem de programação escolhida;
- O processamento do programa, quando o código antes obtido é editado em um arquivo para que possa ser executado pelo computador.

Duas idéias são freqüentes em cálculo numérico, a de iteração ou aproximação sucessiva e a de aproximação local.

Iteração. Em um sentido amplo, iteração significa a repetição sucessiva de um processo. Um método iterativo se caracteriza por envolver os seguintes elementos:

- Aproximação inicial: consiste em uma primeira aproximação para a solução do problema numérico.
- Teste de parada: é o instrumento por meio do qual o procedimento iterativo é finalizado.

Aproximação local. Aqui a idéia é aproximar uma função por outra que seja de manuseio mais simples. Por exemplo, aproximar uma função não linear por uma função linear em um determinado intervalo do domínio das funções.

SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

- Representação de inteiros
 - Base binária (2)
 - 2 “**bits**” disponíveis [0,1]
 - “Posição” indica potência positiva de 2
 - 1011 na base 2 = $1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 8 + 0 + 2 + 1 = 11$
na base decimal

Cálculo Numérico – Introdução

- Influência dos Erros nas Soluções

Limitação na representação numérica (24 bits)

- Exemplo 1: Falha no lançamento de mísseis
- (25/02/1991 – Guerra do Golfo – míssil Patriot)

Erro de 0,34 s no cálculo do tempo de lançamento



Cálculo Numérico – Introdução

- Influência dos Erros nas Soluções

Limitação na representação numérica (64 bits / 16 bits)

- Exemplo 2: Explosão de foguetes

- (04/06/1996 – Guiana Francesa – foguete Ariane 5)

Erro de trajetória 36,7s após o lançamento

Prejuízo: U\$ 7,5 bilhões



SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

- Representação não-posicional
 - romanos
 - MDCCCXLIX e MMCXXIV
 - Como seria MDCCCXLIX + MMCXXIV ?

SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

- Representação posicional
 - Base decimal (10)
 - 10 dígitos disponíveis [0,1,2, ... ,9]
 - “Posição” indica potência positiva de 10
 - $5432 = 5 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 2 \times 10^0$

SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

- Representação de números fracionários
 - Base decimal (10)
 - “Posição” da parte inteira indica potência positiva de 10
 - Potência negativa de 10 para parte fracionária
 - $54,32 = 5 \times 10^1 + 4 \times 10^0 + \mathbf{3 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2}}$

Sistemas de numeração

- Representação de números fracionários
 - Base binária (2)
 - “Posição” da parte inteira indica potência positiva de 2
 - Potência negativa de 2 para parte fracionária
 - $10,11$ na base 2 = $1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + \mathbf{1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2}}$ = $2 + 0 + 1/2 + 1/4 = 2,75$ na base decimal

OUTROS SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

- Maior interesse em decimal (cultura) e binário (computadores).
- Outros sistemas
 - Octal (8), $\{0,1,2, \dots, 7\}$
 - Hexadecimal (16), $\{0,1,2, \dots, 9, A,B,C,D,E,F\}$

ALGUNS SISTEMAS NUMÉRICOS

Decimal	Binário	Octal	Hexadecimal
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

CONVERSÃO DE SISTEMA OU BASE

- Uma caixa alienígena com o número 25 gravado na tampa foi entregue a um grupo de cientistas. Ao abrirem a caixa, encontraram 17 objetos. Considerando que o alienígena tem um formato humanóide, quantos dedos ele tem nas duas mãos?

CONVERSÃO DE BASE

- $17_{10} = 25_b$
- $17 = 2 \times b^1 + 5 \times b^0$
- $17 = 2b + 5$
- $b = (17 - 5) / 2 = 6$

CONVERSÃO DE BINÁRIOS EM DECIMAIS

$$N = (b_m b_{m-1} \dots b_1 b_0)_2 = (b_m 2^m + b_{m-1} 2^{m-1} + \dots + b_1 2^1 + b_0 2^0)_{10}$$

Onde $b_i \in \{0,1\} \quad \forall i = 0, \dots, m$

$$\begin{aligned} \text{Exemplo: } (1001)_2 &= (b_3 b_2 b_1 b_0)_2 = \\ &= (1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0)_{10} = \\ &= (8 + 0 + 0 + 1)_{10} = \\ &= (9)_{10} \end{aligned}$$

Conversão de Inteiro

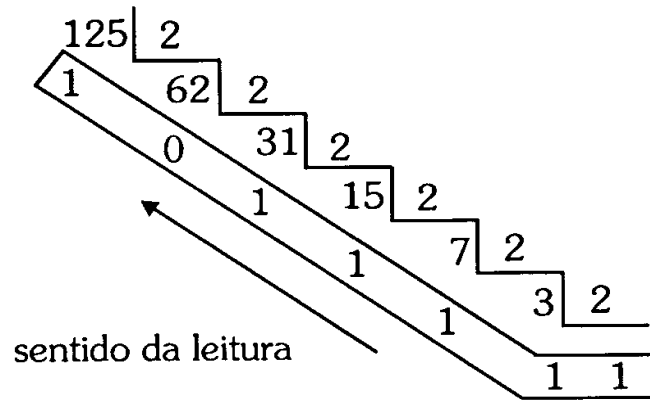
- Inteiro decimal para binário
 - Divisão inteira (do quociente) sucessiva por 2, até que resto seja = 0 ou 1
 - Binário = composição do **último quociente** com **restos**.

Conversão de inteiro

Exemplo: Converter 25 decimal para binário:

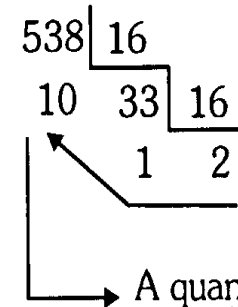
- $25 / 2 = 12$ (quociente) e resto **1**
- $12 / 2 = 6$ (quociente) e resto **0**
- $6 / 2 = 3$ (quociente) e resto **0**
- $3 / 2 = \mathbf{1}$ (último quociente) e resto **1**
- Binário = **1 1 0 0 1**
= $1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$
= $16 + 8 + 0 + 0 + 1 = 25$ decimal

CONVERSÃO DE INTEIROS ENTRE SISTEMAS



$$(125)_{10} = (1111101)_2$$

$$(538)_{10} = (?)_{16}$$



A quantidade 10 é representada pelo algarismo A

$$(538)_{10} = (21A)_{16}$$

CONVERSÃO DE FRAÇÃO (DECIMAL→BINÁRIO)

- Exemplo: converter 0,625 decimal para binário.
- $0,625 \times 2 = 1,25$ logo a primeira casa fracionária é **1**; nova fração (resto) é 0,25 ($1,25 - 1 = 0,25$).
- $0,25 \times 2 = 0,5$ segunda casa é **0**; resto é 0,5.
- $0,5 \times 2 = 1,0$ terceira casa é **1**; resto é zero.
- Resultado: $0,625_{10} = 0,101_2$

CONVERSÃO PARTES INTEIRA E FRACIONÁRIA

- Para converter um número com parte inteira e parte fracionária, fazer a conversão de cada parte separadamente.

$$\text{Número} = \underbrace{a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + a_{n-2} \cdot b^{n-2} + \dots + a_0 \cdot b^0}_{\text{parte inteira}} + \underbrace{a_{-1} \cdot b^{-1} + a_{-2} \cdot b^{-2} + \dots + a_{-m} \cdot b^{-m}}_{\text{parte fracionária}}$$

CONVERSÃO PARTES INTEIRA E FRACIONÁRIA

$$(8,375)_{10} = (?)_2$$

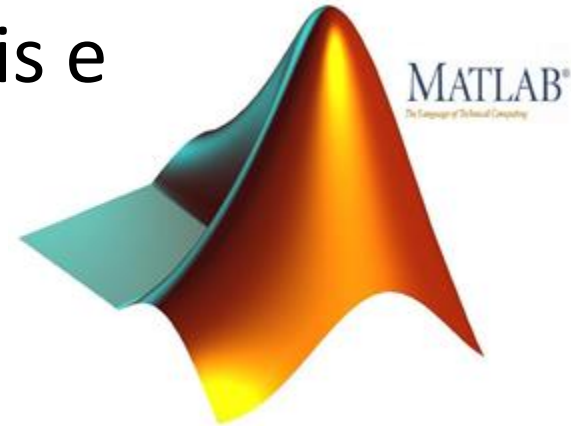
- parte inteira: $(8)_{10} = (1000)_2$
- parte fracionária:

0,375	→	0,750	→	0,500	→	0,000 → Final
$\begin{array}{r} \times 2 \\ \hline 0,750 \end{array}$		$\begin{array}{r} \times 2 \\ \hline 1,500 \end{array}$		$\begin{array}{r} \times 2 \\ \hline 1,000 \end{array}$		
↓		↓		↓		
0		1		1		

$$(8,375)_{10} = (1000,011)_2$$

O que é o MATLAB ?

- Software interativo de alto desempenho.
- Destinado ao cálculo numérico.
- Integração de análise numérica, cálculo com matrizes, processamento de sinais e construção de gráficos.
- Ambiente de fácil interação.



O que é o MATLAB ?

- Resolução de problemas numéricos em apenas uma fração do tempo que se gastaria para escrever um programa semelhante em linguagem Fortran, Basic ou C.
- As soluções dos problemas são expressas quase exatamente como escritas matematicamente, ao contrário da programação tradicional.

Sugestões de leitura e exercícios

- Realize manualmente a conversão de números inteiros e fracionários convertendo entre binário e decimal e vice-versa.
- Crie uma planilha eletrônica para conversão.
- Tente fazer a mesma conversão em Matlab.
- Leia “toda” a wiki do Matlab em:
 - <http://pt.wikipedia.org/wiki/MATLAB>