## Exercícios - OPERAÇÕES COM MATRIZES

1 – Construa a matriz $A = (a_{ij})_{3x3}$ onde $a_{ij} = 1$ para i = j e $a_{ij} = 0$, se $i \neq j$.

**Solução. Os elementos $a_{ij}$ onde i = j na matriz quadrada 3 x 3 localizam-se na diagonal principal. Logo a matriz procurada é a Identidade de ordem 3.** $\boxed{A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$

2 – Encontre os valores de *u* e *v* para que $\begin{bmatrix} 1-2u+u^2 & v^2 & 3 \\ v & 2u & 5 \\ 6 & u & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & u \\ v & -3v & u-v \\ 6 & v+5 & -1 \end{bmatrix}$.

**Solução. Duas matrizes serão iguais se os elementos de uma são os mesmos que os da outra matriz na mesma posição $a_{ij}$. Isto é $a_{11} = b_{11}$; $a_{12} = b_{12}$; ... ; $a_{mn} = b_{mn}$. No caso das matrizes mostradas, as posições onde já há números, não há necessidade de cálculos. Nas posições onde há expressões algébricas encontram-se as condições de igualdade.**

**i) Observando o elemento $a_{13}$ da 1ª matriz verificamos que vale 3. Logo na 2ª matriz devemos ter u = 3.**

**ii) Igualando os elementos $a_{23}$ em ambas as matrizes, temos:**

$$\boxed{\begin{cases} u - v = 5 \\ u = 3 \end{cases} \Rightarrow 3 - v = 5 \Rightarrow v = -2}$$

3 – Para que valores de "a" a matriz $A = \begin{bmatrix} a & a^2-1 & -3 \\ a+1 & 2 & a^2+4 \\ -3 & 4a & -1 \end{bmatrix}$ é simétrica?

**Solução. Uma matriz é simétrica se for igual a sua transposta: $A = A^T$. Temos:**

**i) A transposta de A é a matriz onde os elementos da linha ficarão em colunas:**

$$A^T = \begin{bmatrix} a & a+1 & -3 \\ a^2-1 & 2 & 4a \\ -3 & a^2+4 & -1 \end{bmatrix}.$$

**ii) Igualando quaisquer dos elementos algébricos de mesma posição em ambas matrizes, descobrimos os valores de "a". Escolhendo os elementos $a_{12}$ em A e $A^T$, temos:**

$$a^2 - 1 = a + 1 \Rightarrow a^2 - 1 - a - 1 = 0 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow (a-2).(a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -1 \end{cases}$$

$ou$

$$a = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1+3}{2} = 2 \\ a = \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

**. Logo a = 2 ou a = - 1.**

**Mas, para o caso de a = - 1, temos que a² + 4 ≠ 4a. Logo, somente a = 2 satisfaz a todas as condições.**

4 – Calcule A + B, A – B e 5A – 3B se $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}$.

**Solução. Aplicando as regras utilizadas nas operações com matrizes, temos:**

**i)** $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 16 \end{bmatrix}$ **ii)**

$A - B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -6 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

**iii)**

$5A - 3B = 5.\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix} - 3.\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -5 \\ 10 & 15 & 35 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -3 & 15 \\ 0 & 3 & 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 8 & -20 \\ 10 & 12 & 8 \end{bmatrix}$

5 – Caso seja possível encontre os produtos de AB e BA.

**Solução. A multiplicação entre duas matrizes só é possível se o número de colunas da 1ª for o mesmo do número de linhas da 2ª.**

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ e

$B = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

**a)** $A.B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0*1+1*5 & 0*(-1)+1*2 \\ 2*1+3*5 & 2*(-1)+3*2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 17 & 4 \end{bmatrix}$**.**

**É possível calcular B.A, pois são de mesma ordem logo satisfazem as condições de nº de colunas e linhas.**

$B.A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} . = \begin{bmatrix} 1*0+(-1)*2 & 1*1+(-1)*3 \\ 5*0+2*2 & 5*1+2*3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}$

**OBS: Os resultados são diferentes reforçando que a multiplicação entre matrizes não é comutativa.**

**b)**

$A.B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*1+(-1)*0 & 1*(-1)+(-1)*1 & 1*5+(-1)*9 \\ 5*1+2*0 & 5*(-1)+2*1 & 5*5+2*9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 5 & -3 & 43 \end{bmatrix}$

**Não é possível calcular B.A, pois B possui três colunas e A possui duas linhas.**

**c)** $A.B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3*5+2*2+1*0+6*1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \end{bmatrix}$**.**

**É possível calcular B.A, pois $B_{4x1}$ e $A_{1x4}$. Logo o produto será da forma $(BA)_{4x4}$.**

$$B.A=\begin{bmatrix}5\\2\\0\\1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}3&2&1&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5*3&5*2&5*1&5*6\\2*3&2*2&2*1&2*6\\0*3&0*2&0*1&0*6\\1*3&1*2&1*1&1*6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15&10&5&30\\6&4&2&12\\0&0&0&0\\3&2&1&6\end{bmatrix}$$

6 – Encontre a matriz X, na equação A.X = B, onde $A=\begin{bmatrix}3&-1\\1&2\\0&3\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}5&3\\4&1\\3&0\end{bmatrix}$.

**Solução. Como a matriz A é de ordem 3 x 2 a matriz X deve possuir duas linhas (mesmo nº de colunas de A). A matriz B é de ordem 2 x 3. Logo X possui 2 linhas. Isto é: $(A_{3x2}).(X_{2x2})=B_{3x2}$. Repare que se X possuísse três colunas a matriz B seria 3 x 3. Escolhendo a, b, c, d como elementos de X, montamos a equação:**

$$\begin{cases}A.X=\begin{bmatrix}3&-1\\1&2\\0&3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3a-c&3b-d\\a+2c&b+2d\\3c&3d\end{bmatrix}\\B=\begin{bmatrix}5&3\\4&1\\3&0\end{bmatrix}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3a-c=5\\3b-d=3\\a+2c=4\\b+2d=1\\3c=3\Rightarrow c=1\\3d=0\Rightarrow d=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3a-1=5\Rightarrow a=2\\3b-0=3\Rightarrow b=1\end{cases}\Rightarrow X=\begin{bmatrix}2&1\\1&0\end{bmatrix}$$

7 – Resolva a equação $\frac{3}{2}A+2B=\frac{X}{2}-B$, sabendo que $A=\begin{bmatrix}3&4\\1&1\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}-3&-5\\6&0\end{bmatrix}$.

**Solução. Antes da substituição dos valores das matrizes, é interessante simplificar o máximo a equação. Temos:** $\boxed{\frac{3}{2}A+2B=\frac{X}{2}-B\Rightarrow 3A+4B=X-2B\Rightarrow X=3A+6B}$. **O cálculo resume-se em multiplicação por escalares e adição de matrizes:**

$$\begin{cases}A=\begin{bmatrix}3&4\\1&1\end{bmatrix}\Rightarrow 3.A=\begin{bmatrix}9&12\\3&3\end{bmatrix}\\B=\begin{bmatrix}-3&-5\\6&0\end{bmatrix}\Rightarrow 6.B=\begin{bmatrix}-18&-30\\18&0\end{bmatrix}\end{cases}\Rightarrow X=\begin{bmatrix}9&12\\3&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-18&-30\\36&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9&-18\\39&3\end{bmatrix}$$

8 – Dada a função $f(x)=x^2-2x$, calcule f(A) onde $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

**Solução. Calcular f(A) significa construir a matriz onde cada elemento é $f(a_{ij})$. Temos:**

$$f(A)=f\left(\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}f(1)&f(0)&f(0)\\f(0)&f(1)&f(0)\\f(0)&f(0)&f(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

**, onde**

$$\begin{cases}f(1)=(1)^2-2(1)=1-2=-1\\f(0)=(0)^2-2(0)=0\end{cases}$$

9 – Diz-se que uma matriz **A** é idempotente se **A²** = **A.** Mostre $A=\begin{bmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{bmatrix}$ é **idempotente**.

**Solução. Calculando o produto A.A = A², temos:**

$$A.A=\begin{bmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+2-4&-4-6+8&-8-8+12\\-2-3+4&2+9-8&4+12-12\\2+2-3&-2-6+6&-4-8+9\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{bmatrix}=A\rightarrow ok!$$

10 – Se $A=\begin{bmatrix}3&4\\1&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-3&-5\\6&0\end{bmatrix}$ e k = - 3 , calcule:

a) $A^T$ b) $B^T$ c) $(A + B)^T$ d) $(k.A)^T$

**Solução. Aplicação direta dos conceitos de transposta e operações entre matrizes.**

**a)** $A=\begin{bmatrix}3&4\\1&1\end{bmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{bmatrix}3&1\\4&1\end{bmatrix}$

**b)** $B=\begin{bmatrix}-3&-5\\6&0\end{bmatrix}\Rightarrow B^T=\begin{bmatrix}-3&6\\-5&0\end{bmatrix}$

**c)** $A+B=\begin{bmatrix}3&4\\1&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3&-5\\6&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1\\7&1\end{bmatrix}\Rightarrow(A+B)^T=\begin{bmatrix}0&7\\-1&1\end{bmatrix}$

**d)** $k.A=(-3)\begin{bmatrix}3&4\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9&-12\\-3&-3\end{bmatrix}\Rightarrow(k.A)^T=\begin{bmatrix}-9&-3\\-12&-3\end{bmatrix}$

Parte dos exercícios foram retirados dos livros:
K. Sydsaeter et al, *Matemática Essencial Para Análise Económica*, Prentice Hall, 2002.
D. Lay, *Linear Algebra and its Applications*, Addison Wesley, London, 2003.

1.