

►► PROBLEMAS

19.1 Derive a Equação (19.4) integrando a Equação (19.3).

19.2 Calcule a seguinte integral:

$$\int_0^4 (1 - e^{-x}) dx$$

(a) analiticamente, (b) por uma única aplicação da regra do trapézio, (c) por aplicações múltiplas da regra do trapézio, com $n = 2$ e 4 , (d) uma única aplicação da regra 1/3 de Simpson, (e) aplicação múltipla da regra 1/3 de Simpson, com $n = 4$, (f) uma única aplicação da regra 3/8 de Simpson, e (g) aplicação múltipla da regra de Simpson, com $n = 5$. Para cada estimativa numérica de (b) a (g), determine o erro relativo percentual com base em (a).

19.3 Calcule a seguinte integral:

$$\int_0^{\pi/2} (8 + 4 \cos x) dx$$

(a) analiticamente, (b) por uma única aplicação da regra do trapézio, (c) por aplicações múltiplas da regra do trapézio, com $n = 2$ e 4 , (d) uma única aplicação da regra 1/3 de Simpson, (e) aplicação múltipla da regra 1/3 de Simpson, com $n = 4$, (f) uma única aplicação da regra 3/8 de Simpson, e (g) aplicação múltipla da regra de Simpson, com $n = 5$. Para cada estimativa numérica de (b) a (g), determine o erro relativo percentual com base em (a).

19.4 Calcule a seguinte integral:

$$\int_{-2}^4 (1 - x - 4x^3 + 2x^5) dx$$

(a) analiticamente, (b) por uma única aplicação da regra do trapézio, (c) por aplicações múltiplas da regra do trapézio, com $n = 2$ e 4 , (d) uma única aplicação da regra 1/3 de Simpson, (e) regra 3/8 de Simpson, (f) regra de Boole. Para cada estimativa numérica de (b) a (f), determine o erro relativo percentual com base em (a).

19.5 A função

$$f(x) = e^{-x}$$

pode ser usada para gerar a seguinte tabela de dados desigualmente espaçados:

x	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,95	1,2
$f(x)$	1	0,9048	0,7408	0,6065	0,4966	0,3867	0,3012

Calcule a integral de $a = 0$ a $b = 0,6$, usando (a) métodos analíticos, (b) a regra do trapézio, e (c) uma combinação das regras do trapézio e de Simpson sempre que possível para obter a máxima acurácia. Para (b) e (c), calcule o erro relativo percentual.

19.6 Calcule a seguinte integral dupla:

$$\int_{-2}^2 \int_0^4 (x^2 - 3y^2 + xy^3) dx dy$$

(a) analiticamente, (b) usando a aplicação múltipla da regra do trapézio, com $n = 2$, e (c) usando aplicações únicas da regra 1/3 de Simpson. Para (b) e (c), calcule o erro relativo percentual.

19.7 Calcule a seguinte integral tripla:

$$\int_{-4}^4 \int_0^6 \int_{-1}^3 (x^3 - 2yz) dx dy dz$$

(a) analiticamente, e (b) usando aplicações únicas da regra 1/3 de Simpson. Para (b), calcule o erro relativo percentual.

19.8 Determine a distância percorrida para os seguintes dados de velocidade:

t	1	2	3,25	4,5	6	7	8	8,5	9	10
v	5	6	5,5	7	8,5	8	6	7	7	5

(a) Use a regra do trapézio; e também determine a velocidade média.

(b) Ajuste os dados com uma equação cúbica utilizando regressão polinomial. Integre o polinômio cúbico para determinar a distância.

19.9 A água exerce uma pressão na face a montante de um dique, como mostra a Figura P19.9. A pressão pode ser caracterizada por

$$p(z) = \rho g(D - z) \quad (P19.9)$$

onde $p(z)$ é a pressão em pascais (ou N/m^2) exercida a uma elevação de z metros acima do fundo da represa; ρ é a densidade da água, a qual nesse problema considera-se ser constante e igual a 10^3 kg/m^3 ; g é a aceleração da gravidade ($9,8$ m/s^2); e D é a elevação (em m) da superfície da água acima do fundo da represa. De acordo com a Equação (P19.9), a pressão aumenta linearmente com a profundidade, como mostra a Figura P19.9a. Omitindo a pressão atmosférica (pois ela age contra os dois lados do dique e essencialmente se cancela), a força total f_i pode ser determinada multiplicando-se a pressão pela área do lado do dique (como mostra a Figura 19.9b). Como tanto a pressão quanto a área variam com o nível de profundidade, a força total é obtida calculando

$$f_i = \int_0^D \rho g w(z)(D - z) dz$$

onde $w(z)$ é igual à largura do dique (m) na elevação z (Figura P19.9b). A reta de ação também pode ser obtida pelo cálculo de

$$d = \frac{\int_0^D \rho g z w(z)(D - z) dz}{\int_0^D \rho g w(z)(D - z) dz}$$

Use a regra de Simpson para determinar f_i e d .

19.10 A força exercida no mastro de um veleiro pode ser representada pela seguinte função:

$$f(z) = 200 \left(\frac{z}{5+z} \right) e^{-2z/H}$$

onde z é a elevação acima do convés e H é a altura do mastro. A força total F exercida no mastro

pode ser determinada integrando essa função ao longo da altura do mastro:

$$F = \int_0^H f(z) dz$$

A linha de ação também pode ser determinada por integração:

$$d = \frac{\int_0^H z f(z) dz}{\int_0^H f(z) dz}$$

(a) Use a aplicação múltipla da regra do trapézio para calcular F e d para o caso em que $H = 30$ ($n = 6$).

(b) Repita (a), mas use a aplicação múltipla da regra 1/3 de Simpson.

19.11 A força do vento distribuída contra o lado de um edifício é medida como

Altura l , m	0	30	60	90	120
Força, $F(l)$, N/m	0	340	1.200	1.550	2.700
Altura l , m	150	180	210	240	
Força, $F(l)$, N/m	3.100	3.200	3.500	3.750	

Calcule a força líquida e a linha de ação decorrentes dessa distribuição do vento.

19.12 Uma viga de 11 m está sujeita a uma carga, e a força de cisalhamento segue a equação

$$V(x) = 5 + 0,25x^2$$

onde V é a força de cisalhamento e x é a distância ao longo da viga. Sabemos que $V = dM/dx$, e M é o momento de deformação. A integração fornece a relação

$$M = M_0 + \int_0^x V dx$$

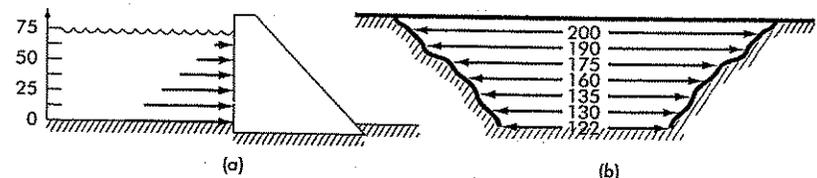


FIGURA P19.9 Água exercendo pressão na face a montante de um dique: (a) vista lateral que mostra a força linearmente crescente com a profundidade; (b) visão frontal que mostra a largura da represa em metros.

Se M_0 é 0 e $x = 11$, calcule M usando (a) integração analítica, (b) aplicação múltipla da regra do trapézio, e (c) aplicação múltipla das regras de Simpson. Para (b) e (c), use incrementos de 1 m.

19.13 A massa total de uma haste de densidade variável é dada por

$$m = \int_0^L \rho(x)A_c(x) dx$$

onde m é a massa, $\rho(x)$ é a densidade, $A_c(x)$ é a área da seção transversal, x é a distância ao longo da haste e L e o comprimento total da haste. Os seguintes dados foram medidos para uma haste de 20 m. Determine a massa em gramas com a melhor precisão possível.

x, m	0	4	6	8	12	16	20
$\rho, g/cm^3$	4,00	3,95	3,89	3,80	3,60	3,41	3,30
A_c, cm^2	100	103	106	110	120	133	150

19.14 Um estudo em engenharia de transporte exige que você determine o número de carros que passa por uma interseção durante o horário de *rush* da manhã. Você fica em um lado da estrada e conta o número de carros que passa em 4 minutos, em diferentes instantes, conforme tabulado a seguir. Use o melhor método numérico para determinar (a) o número total de carros que passa entre 7:30 e 9:15 e (b) a taxa de carros passando pela interseção por minuto. (Sugestão: tenha cuidado com as unidades.)

Horário (h)	7:30	7:45	8:00	8:15	8:45	9:15
Taxa (carros em 4 min)	18	23	14	24	20	9

19.15 Determine o valor médio para os dados na Figura P19.15. Faça a integral necessária para a média na ordem mostrada na seguinte equação:

$$I = \int_{x_0}^{x_n} \left[\int_{y_0}^{y_m} f(x, y) dy \right] dx$$

19.16 A integração fornece um meio de calcular quanta massa entra em um reator, ou sai dele, em um período especificado de tempo, como em

$$M = \int_{t_1}^{t_2} Qc dt$$

onde t_1 e t_2 são os instantes inicial e final, respectivamente. Essa fórmula faz sentido do ponto de vista intuitivo se você lembrar a analogia entre integral e soma. Logo, a integral representa a somatória do produto entre a vazão e a concentração para fornecer a massa total entrando ou saindo entre t_1 e t_2 . Use integração numérica para avaliar essa equação para os dados listados a seguir.

t, min	0	10	20	30	35	40	45	50
$Q, m^3/min$	4	4,8	5,2	5,0	4,6	4,3	4,3	5,0
$c, mg/m^3$	10	35	55	52	40	37	32	34

19.17 A área da seção transversal de um canal pode ser calculada por

$$A_c = \int_0^B H(y) dy$$

onde B é a largura total do canal (m), H é a profundidade (m) e y é a distância da margem (m). De forma parecida, a vazão média Q (m^3/s) pode ser calculada como

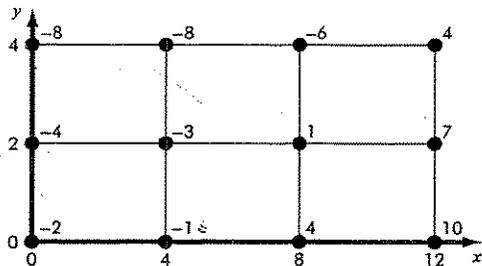


FIGURA P19.15

$$Q = \int_0^B U(y)H(y) dy$$

onde U é a velocidade da água (m/s). Use essas relações e um método numérico para determinar A_c e Q para os seguintes dados:

y, m	0	2	4	5	6	9
H, m	0,5	1,3	1,25	1,8	1	0,25
$U, m/s$	0,03	0,06	0,05	0,13	0,11	0,02

19.18 A concentração média de uma substância \bar{c} (g/m^3) em um lago onde a área A_s (m^2) varia com a profundidade z (m) pode ser calculada por integração:

$$\bar{c} = \frac{\int_0^Z c(z)A_s(z) dz}{\int_0^Z A_s(z) dz}$$

onde Z é a profundidade total (m). Determine a concentração média com base nos seguintes dados:

z, m	0	4	8	12	16
$A, 10^6 m^2$	9,8175	5,1051	1,9635	0,3927	0,0000
$c, g/m^3$	10,2	8,5	7,4	5,2	4,1

19.19 Como foi feito na Seção 19.9, determine o trabalho realizado se uma força constante de 1 N aplicada em um ângulo θ resulta nos deslocamentos a seguir. Use a função `cumtrapz` para determinar o trabalho cumulativo e trace o resultado *versus* θ .

x, m	0	1	2,8	3,9	3,8	3,2	1,3
$\theta, graus$	0	30	60	90	120	150	180

19.20 Calcule o trabalho como descrito na Seção 19.9, mas use as equações a seguir para $F(x)$ e $\theta(x)$:

$$F(x) = 1,6x - 0,045x^2$$

$$\theta(x) = -0,00055x^3 + 0,0123x^2 + 0,13x$$

A força está em Newtons e o ângulo está em radianos. Faça a integral de $x = 0$ a 30 m.

19.21 Como especificado na tabela a seguir, uma partícula esférica manufaturada tem uma densidade que varia como uma função da distância de seu centro ($r = 0$):

r, mm	0	0,12	0,24	0,36	0,49
$\rho(g/cm^3)$	6	5,81	5,14	4,29	3,39
r, mm	0,62	0,79	0,86	0,93	1
$\rho(g/cm^3)$	2,7	2,19	2,1	2,04	2

Use integração numérica para estimar a massa da partícula (em g) e a densidade média (em g/cm^3).

19.22 Como especificado na tabela a seguir, a densidade da Terra varia como uma função da distância de seu centro ($r = 0$):

r, km	0	1100	1500	2450	3400	3630
$\rho(g/cm^3)$	13	12,4	12	11,2	9,7	5,7
r, km	4500	5380	6060	6280	6380	
$\rho(g/cm^3)$	5,2	4,7	3,6	3,4	3	

Use integração numérica para estimar a massa da Terra (em toneladas métricas) e a densidade média (em g/cm^3). Desenvolva dois gráficos organizados verticalmente em uma mesma janela (utilize o comando `subplot`), um da densidade *versus* o raio (parte superior), e outro da massa *versus* o raio (parte inferior). Considere que a Terra é uma esfera perfeita.

►► PROBLEMAS

20.1 Use integração de Romberg para calcular

$$I = \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$$

para uma acurácia de $\varepsilon_s = 0,5\%$. Seus resultados devem ser apresentados no formato da Figura 20.1. Utilize a solução analítica da integral para determinar o erro relativo percentual do resultado obtido com integração de Romberg. Verifique que ε_r é menor do que ε_s .

20.2 Calcule a integral a seguir (a) analiticamente, (b) usando integração de Romberg ($\varepsilon_s = 0,5\%$), (c) usando a fórmula da quadratura de Gauss de três pontos, e (d) usando a função quad do MATLAB:

$$I = \int_0^8 -0,055x^4 + 0,86x^3 - 4,2x^2 + 6,3x + 2 dx$$

20.3 Calcule a integral seguinte com (a) a integração de Romberg ($\varepsilon_s = 0,5\%$), (b) a fórmula da quadratura de Gauss de dois pontos, e (c) as funções quad e quad1 do MATLAB:

$$I = \int_0^3 xe^{2x} dx$$

20.4 Não há solução na forma fechada para a função erro

$$\operatorname{erf}(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^a e^{-x^2} dx$$

Use as fórmulas de Gauss Legendre de (a) dois pontos e (b) três pontos para estimar $\operatorname{erf}(1,5)$. Determine o erro relativo percentual para cada caso com base no valor verdadeiro, que pode ser determinado com a função nativa `erf` do MATLAB.

20.5 A força no mastro de um veleiro pode ser representada por

$$F = \int_0^H 200 \left(\frac{z}{5+z}\right) e^{-2z/H} dz$$

onde z é a elevação acima do convés e H é a altura do mastro. Calcule F para o caso em que $H = 30$ usando (a) integração de Romberg para uma tolerância de $\varepsilon_s = 0,5\%$, (b) a fórmula de Gauss-Legendre de dois pontos, e (c) a função quad do MATLAB.

20.6 O valor médio quadrático de uma corrente pode ser calculado como

$$I_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$$

Para $T = 1$, considere que $i(t)$ é definida como

$$i(t) = 8e^{-t/T} \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \quad \text{para } 0 \leq t \leq T/2$$

$$i(t) = 0 \quad \text{para } T/2 \leq t \leq T$$

Calcule o valor de I_{rms} usando (a) integração de Romberg para uma tolerância de $0,1\%$, (b) fórmulas de Gauss-Legendre de dois e três pontos, e (c) a função quad do MATLAB.

20.7 O calor necessário, ΔH (cal), para induzir uma variação de temperatura, ΔT ($^{\circ}\text{C}$), de um material pode ser calculado como

$$\Delta H = mC_p(T)\Delta T$$

onde m é a massa (g) e $C_p(T)$ é o calor específico [cal/(g \cdot $^{\circ}\text{C}$)]. O calor específico aumenta com a temperatura, T ($^{\circ}\text{C}$), de acordo com

$$C_p(T) = 0,132 + 1,56 \times 10^{-4}T + 2,64 \times 10^{-7}T^2$$

Escreva um programa que use a função quad para gerar um gráfico de ΔH versus ΔT para casos em que $m = 1$ kg, a temperatura inicial é -100 $^{\circ}\text{C}$ e ΔT varia de 0 a 300 $^{\circ}\text{C}$.

20.8 A quantidade de massa transportada por um tubo durante um período de tempo pode ser calculada por

$$M = \int_{t_1}^{t_2} Q(t)c(t) dt$$

onde M é a massa (mg), t_1 é o instante inicial (min), t_2 é o instante final (min), $Q(t)$ é a vazão (m^3/min) e $c(t)$ é a concentração (mg/m^3). As seguintes representações funcionais definem a variação temporal da vazão e da concentração:

$$Q(t) = 9 + 5 \cos^2(0,4t)$$

$$c(t) = 5e^{-0,5t} + 2e^{0,15t}$$

Determine a massa transportada entre $t_1 = 2$ e $t_2 = 8$ min com (a) a integração de Romberg para uma tolerância de $0,1\%$ e (b) a função quad do MATLAB.

20.9 Calcule a integral dupla

$$\int_{-2}^2 \int_0^4 (x^2 - 3y^2 + xy^3) dx dy$$

(a) analiticamente e (b) usando a função `dblquad` do MATLAB. Use o comando `help` para entender como implementar a função.

20.10 Calcule o trabalho como descrito na Seção 19.9, mas use as seguintes equações para $F(x)$ e $\theta(x)$:

$$F(x) = 1,6x - 0,045x^2$$

$$\theta(x) = -0,00055x^3 + 0,0123x^2 + 0,13x$$

A força está em newtons e o ângulo está em radianos. Efetue a integração de $x = 0$ a 30 m.

20.11 Efetue os mesmos cálculos como na Seção 20.5, mas para a corrente especificada por

$$i(t) = 6e^{-1,25t} \text{ sen } 2\pi t \quad \text{para } 0 \leq t \leq T/2$$

$$i(t) = 0 \quad \text{para } T/2 < t \leq T$$

onde $T = 1$ s.

20.12 Calcule a potência absorvida por um elemento em um circuito como descrito na Seção 20.5, mas para uma corrente senoidal simples $i = \text{sen}(2\pi t/T)$ onde $T = 1$ s.

- (a) Considere que a lei de Ohm é válida e $R = 5 \Omega$.
- (b) Admita que a lei de Ohm não é válida e que a tensão e a corrente estão relacionadas pela seguinte relação não linear: $V = (5i - 1,25i^2)$.

20.13 Considere que a corrente por um resistor é descrita pela função

$$i(t) = (60 - t)^2 + (60 - t) \text{ sen}(\sqrt{t})$$

e a resistência é uma função da corrente:

$$R = 10i + 2i^{2/3}$$

Calcule a tensão média ao longo de $t = 0$ a 60 usando a regra 1/3 de Simpson composta.

20.14 Se um capacitor está inicialmente descarregado (sem cargas), a tensão através dele como uma função do tempo pode ser calculada como

$$V(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt$$

Use o MATLAB para ajustar esses dados com um polinômio de grau cinco. Então, use uma função de integração numérica com um valor de $C = 10^{-5}$ farad para gerar um gráfico de tensão versus tempo.

$t, \text{ s}$	0	0,2	0,4	0,6
$i, 10^{-3} \text{ A}$	0,2	0,3683	0,3819	0,2282
$t, \text{ s}$	0,8	1	1,2	
$i, 10^{-3} \text{ A}$	0,0486	0,0082	0,1441	

20.15 O trabalho realizado por um corpo é igual à força vezes a distância deslocada no sentido da força. A velocidade de um corpo no sentido de uma força é dada por

$$v = 4t \quad 0 \leq t \leq 5$$

$$v = 20 + (5 - t)^2 \quad 5 \leq t \leq 15$$

onde v está em m/s. Determine o trabalho se uma força constante de 200 N é aplicada para todo t .

20.16 Uma haste sujeita a uma carga axial (Figura P20.16a) será deformada, como mostra a curva de tensão-deformação na Figura P20.16b. A área

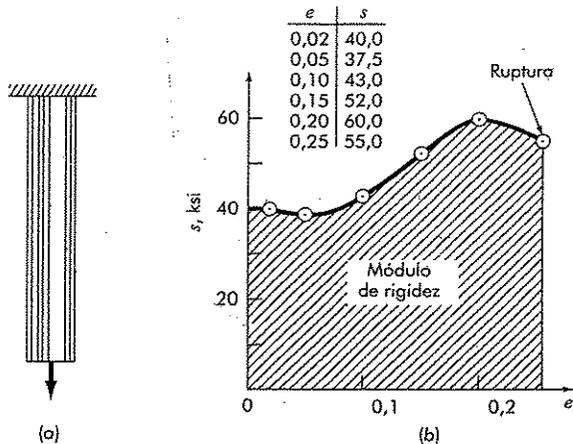


FIGURA P20.16 (a) Uma haste sob carga axial e (b) a curva de tensão-deformação, em que a tensão está em kips por polegada quadrada (10^3 lb/pol^2) e a deformação é adimensional.

sob a curva da tensão zero até o ponto de ruptura é chamada de *módulo de rigidez* do material, e fornece uma medida da energia por unidade de volume necessária para causar a ruptura do material; assim, é representativo da habilidade do material de suportar uma carga de impacto. Use integração numérica para calcular o módulo de rigidez para a curva de tensão-deformação vista na Figura P20.16b.

20.17 Se a distribuição de velocidade de um fluido escoando por tubo for conhecida (Figura P20.17), a vazão Q (isto é, o volume de água passando pelo tubo por unidade de tempo) pode ser calculada por $Q = \int v dA$, onde v é a velocidade e A é a área da seção transversal do tubo. (Para perceber o significado dessa relação fisicamente, lembre-se da conexão íntima entre soma e integração.) Para um tubo circular, $A = \pi r^2$ e $dA = 2\pi r dr$. Portanto,

$$Q = \int_0^r v(2\pi r) dr$$

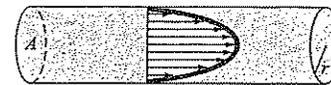


FIGURA P20.17

onde r é a distância radial medida a partir do centro do tubo. Se a distribuição de velocidade é dada por

$$v = 2 \left(1 - \frac{r}{r_0} \right)^{1/6}$$

onde r_0 é o raio total (nesse caso, 3 cm), calcule Q usando a regra do trapézio com aplicações múltiplas. Discuta os resultados.

20.18 Usando os dados seguintes, calcule o trabalho feito ao se esticar uma mola, que tem uma constante de mola $k = 300$ N/m, até $x = 0,35$ m. Para isso, ajuste os dados com um polinômio e, então, integre o polinômio numericamente para calcular o trabalho:

$F, 10^3 \cdot \text{N}$	0	0,01	0,028	0,046
$x, \text{ m}$	0	0,05	0,10	0,15
$F, 10^3 \cdot \text{N}$	0,063	0,082	0,11	0,13
$x, \text{ m}$	0,20	0,25	0,30	0,35

20.19 Calcule a distância vertical percorrida por um foguete se a velocidade vertical é dada por

$$v = 11t^2 - 5t \quad 0 \leq t \leq 10$$

$$v = 1100 - 5t \quad 10 \leq t \leq 20$$

$$v = 50t + 2(t - 20)^2 \quad 20 \leq t \leq 30$$

20.20 A velocidade para cima de um foguete pode ser calculada pela seguinte fórmula:

$$v = u \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - qt} \right) - gt$$

onde v é a velocidade para cima, u é a velocidade relativa ao foguete na qual o fluido é expelido, m_0 é a massa inicial do foguete no instante $t = 0$, q é a taxa de consumo de combustível e g é a aceleração para baixo da gravidade (considerada constante e igual a $9,81 \text{ m/s}^2$). Se $u = 1.850 \text{ m/s}$, $m_0 = 160.000 \text{ kg}$ e $q = 2.500 \text{ kg/s}$, determine quanto alto o foguete irá voar em 30 s.

20.21 A distribuição normal é definida como

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

- (a) Use o MATLAB para integrar essa função de $x = -1$ a 1 e de -2 a 2 .
- (b) Utilize o MATLAB para determinar os pontos de inflexão dessa função.

20.22 Use a integração de Romberg para calcular

$$\int_0^2 \frac{e^x \text{ sen } x}{1 + x^2} dx$$

para uma acurácia de $\epsilon_s = 0,5\%$. Seus resultados devem ser apresentados na forma da Figura 20.1.

20.23 Lembre-se de que a velocidade do saltador de bungee jumping em queda livre pode ser calculada analiticamente como [Equação (1.9)]:

$$v(t) = \sqrt{\frac{gm}{c_d}} \tanh \left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}} t \right)$$

onde $v(t)$ é a velocidade (m/s), t é o tempo (s), $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, m é a massa (kg) e c_d é o coeficiente de arraste (kg/m).

- (a) Use a integração de Romberg para calcular o quanto longe o saltador viaja durante os 8 primeiros segundos de queda livre, dados $m = 80 \text{ kg}$ e $c_d = 0,2 \text{ kg/m}$. Calcule sua resposta para $\epsilon_s = 1\%$.
- (b) Efetue o mesmo cálculo com a função quad do MATLAB.

20.24 Prove que a Equação (20.30) é equivalente à lei de Boole.

20.25 Como especificado na tabela a seguir, a densidade da Terra varia como uma função da distância a partir de seu centro ($r = 0$):

r , km	0	1.100	1.500	2.450	3.400	3.630	4.500
ρ , g/cm ³	13	12,4	12	11,2	9,7	5,7	5,2
r , km	5.380	6.060	6.280	6.380			
ρ , g/cm ³	4,7	3,6	3,4	3			

Desenvolva um programa para ajustar esses dados com a função `interp1` usando a opção `pchip`. Gere um gráfico que mostre o ajuste resultante junto com os pontos dados. Então, use uma das

funções de integração do MATLAB para estimar a massa da terra (em toneladas métricas) pela integração da saída da função `interp1`.

20.26 Desenvolva uma função no MATLAB para implementar a integração de Romberg com base na Figura 20.2. Teste a função usando-a para determinar a integral do polinômio do Exemplo 20.1. Então, use-a para resolver o Problema 20.1.

20.27 Desenvolva uma função no MATLAB para implementar a quadratura adaptativa com base na Figura 20.6. Teste a função usando-a para determinar a integral do polinômio do Exemplo 20.1. Então, use-a para resolver o Problema 20.20.

►► PROBLEMAS

21.1 Calcule aproximações por diferenças progressivas e regressivas de $O(h)$ e $O(h^2)$, e aproximações por diferenças centradas de $O(h^2)$ e $O(h^4)$ para a primeira derivada de $y = \cos x$ em $x = \pi/4$ usando um valor de $h = \pi/12$. Faça uma estimativa do erro relativo percentual verdadeiro ϵ , para cada aproximação.

21.2 Use aproximações por diferenças centradas para obter estimativas para a primeira e a segunda derivadas de $y = e^x$ em $x = 2$ para $h = 0,1$. Empregue tanto fórmulas de ordem $O(h^2)$ como de ordem $O(h^4)$ para suas estimativas

21.3 Utilize uma expansão em série de Taylor para deduzir uma aproximação por diferença finita centrada para a segunda derivada que seja acurada até segunda ordem. Para isso, você deve usar quatro expansões diferentes para os pontos $x_{i-2}, x_{i-1}, x_{i+1}$ e x_{i+2} . Em cada caso, a expansão será em torno do ponto x_i . O intervalo Δx será usado no caso de $i-1$ e $i+1$ e $2\Delta x$ será usado no caso de $i-2$ e $i+2$. As quatro equações devem ser combinadas de forma a eliminar a primeira e a segunda derivadas. Mantenha termos suficientes em cada expansão para calcular o primeiro termo, que será truncado para determinar a ordem da aproximação.

21.4 Use a extrapolação de Richardson para obter uma estimativa da primeira derivada de $y = \cos x$ em $x = \pi/4$ utilizando tamanhos de passo de $h_1 = \pi/3$ e $h_2 = \pi/6$. Use diferenças centradas de $O(h^2)$ para a estimativa inicial.

21.5 Repita o Problema 21.4, mas para a primeira derivada de $\ln x$ em $x = 5$ usando $h_1 = 2$ e $h_2 = 1$.

21.6 Utilize a Equação (21.21) para determinar a primeira derivada de $y = 2x^4 - 6x^3 - 12x - 8$ em $x = 0$ com base nos valores em $x_0 = -0,5, x_1 = 1$ e $x_2 = 2$. Compare esse resultado com o valor verdadeiro e com a estimativa obtida usando uma aproximação por diferença centrada com base em $h = 1$.

21.7 Demonstre que, para pontos igualmente espaçados, a Equação (21.21) se reduz à Equação (4.25) em $x = x_1$.

21.8 Desenvolva um arquivo-M para aplicar o algoritmo de Romberg para estimar a derivada de uma função dada.

21.9 Desenvolva um arquivo-M para obter estimativas da primeira derivada para dados desigualmente espaçados. Teste-o com os seguintes dados:

x	0,6	1,5	1,6	2,5	3,5
$f(x)$	0,9036	0,3734	0,3261	0,08422	0,01596

onde $f(x) = 5e^{-2x}$. Compare seus resultados com as derivadas verdadeiras.

21.10 Desenvolva uma função no MATLAB para calcular estimativas da primeira e segunda derivadas de ordem $O(h^2)$ com base nas fórmulas nas Figuras 21.3 a 21.5. A primeira linha da função deve ser definida como

```
function [dydx, d2ydx2] = diffeq(x,y)
```

onde x e y são vetores de entrada de comprimento n que contêm os valores das variáveis independente e dependente, respectivamente, e dx e dy são vetores de saída de comprimento n que contêm as estimativas da primeira e segunda derivadas em cada valor da variável independente. A função deve gerar um gráfico de $dydx$ e dy^2dx^2 versus x . Seu arquivo-M deve retornar uma mensagem de erro se (a) os vetores de entrada não têm o mesmo tamanho, ou (b) os valores para a variável independente não estão igualmente espaçados. Teste seu programa com os dados do Problema 21.11.

21.11 Foram coletados os seguintes dados para a distância percorrida em função do tempo para um foguete:

t, s	0	25	50	75	100	125
y, km	0	32	58	78	92	100

Use derivação numérica para obter estimativas da velocidade e da aceleração em cada instante.

21.12 A posição de um avião de caça em uma pista do porta-aviões foi cronometrada durante a aterrissagem:

t, s	0	0,52	1,04	1,75	2,37	3,25	3,83
x, m	153	185	208	249	261	271	273

onde x é a distância a partir da extremidade do porta-aviões. Estime (a) a velocidade (dx/dt) e (b) a aceleração (dv/dt) usando derivação numérica.

21.13 Use os seguintes dados para determinar a velocidade e a aceleração em $t = 10$ segundos:

Tempo, t, s	0	2	4	6	8	10	12	14	16
Posição, x, m	0	0,7	1,8	3,4	5,1	6,3	7,3	8,0	8,4

Use métodos de (a) diferença finita centrada, (b) diferença finita progressiva e (c) diferença finita regressiva corrigidos de segunda ordem.

21.14 Um avião está sendo monitorado por um radar, e os dados foram tomados a cada segundo em coordenadas polares θ e r .

t, s	200	202	204	206	208	210
$\theta, (rad)$	0,75	0,72	0,70	0,68	0,67	0,66
r, m	5120	5370	5560	5800	6030	6240

Em 206 segundos, use diferença finita centrada (corrigida de segunda ordem) para determinar as expressões vetoriais da velocidade \vec{v} e da aceleração \vec{a} . A velocidade e a aceleração dadas em coordenadas polares são:

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad \text{e} \quad \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$$

21.15 Use regressão para obter uma estimativa da aceleração para cada instante de tempo para os seguintes dados com polinômios de segundo, terceiro e quarto graus. Faça um gráfico de seus resultados:

t	1	2	3,25	4,5	6	7	8	8,5	9,3	10
v	10	12	11	14	17	16	12	14	14	10

21.16 A distribuição normal é definida por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Utilize o MATLAB para determinar os pontos de inflexão dessa função.

21.17 Os dados a seguir foram gerados a partir da distribuição normal:

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0
$f(x)$	0,05399	0,12952	0,24197	0,35207	0,39894
x	0,5	1	1,5	2	
$f(x)$	0,35207	0,24197	0,12952	0,05399	

Use o MATLAB para determinar os pontos de inflexão desses dados.

21.18 Utilize o comando `diff(y)` para desenvolver uma função no MATLAB para calcular aproximações por diferenças finitas para a primeira e segunda derivadas em cada valor de x na tabela a seguir. Use aproximações por diferenças finitas que são corrigidas de segunda ordem, $O(x^2)$:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1,4	2,1	3,3	4,8	6,8	6,6	8,6	7,5	8,9	10,9	10

21.19 O objetivo deste problema é comparar aproximações por diferenças finitas progressiva,

regressiva e centrada acuradas até segunda ordem de uma função com o valor real da derivada. Isso será feito para

$$f(x) = e^{-2x} - x$$

(a) Use o cálculo para determinar o valor correto da derivada em $x = 2$.

(b) Desenvolva uma função no MATLAB para calcular aproximações por diferenças centradas, começando com $x = 0,5$. Assim, para o primeiro cálculo, os valores de x para a aproximação por diferença centrada serão $x = 2 \pm 0,5$ ou $x = 1,5$ ou $2,5$. Então, diminua em incrementos de $0,01$ até o valor mínimo de $\Delta x = 0,01$.

(c) Repita a parte (b) para diferenças progressivas e regressivas de segunda ordem. (Observe que isso pode ser feito ao mesmo tempo em que a diferença centrada é calculada no laço.)

(d) Faça gráficos dos resultados de (b) e (c) em função de x . Inclua o resultado exato no gráfico para comparação.

21.20 Você tem que medir a vazão de água através de um pequeno tubo. Para isso, coloca um balde na saída do tubo e mede o volume no balde como uma função do tempo, como tabulado a seguir. Faça uma estimativa da vazão em $t = 7$ s.

Tempo, s	0	1	5	8
Volume, cm^3	0	1	8	16,4

21.21 A velocidade v (m/s) do ar que escoou por uma superfície plana é medida a diversas distâncias y (m) da superfície. Use a lei de Newton da viscosidade para determinar a tensão de cisalhamento τ (N/m^2) na superfície ($y = 0$),

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}$$

Considere o valor $\mu = 1,8 \times 10^{-3} N \cdot s/m^2$ para a viscosidade dinâmica.

y, m	0	0,002	0,006	0,012	0,018	0,024
$v, m/s$	0	0,287	0,899	1,915	3,048	4,299

21.22 A primeira lei de difusão de Fick afirma que

$$\text{Fluxo de massa} = -D \frac{dc}{dx} \quad (P21.22)$$

onde o fluxo de massa é a quantidade de massa que passa por unidade de área por unidade de

tempo (g/cm²/s), D é o coeficiente de difusão (cm²/s), c é a concentração (g/cm³) e x é a distância (cm). Um engenheiro ambiental mede as seguintes concentrações de um poluente no sedimento no fundo de um lago ($x = 0$ na interface sedimento-água e aumentando para baixo):

x , cm	0	1	3
c , 10 ⁻⁶ g/cm ³	0,06	0,32	0,6

Use a melhor técnica de derivação disponível para obter uma estimativa da derivada em $x = 0$. Empregue essa estimativa em conjunto com a Equação (P21.22) para calcular o fluxo de massa do poluente saindo do sedimento e indo para a água no fundo do lago ($D = 1,52 \times 10^{-6}$ cm²/s). Para um lago com $3,6 \times 10^6$ m² de sedimentos, quanto poluente seria transportado para ele em um período de um ano?

21.23 Os seguintes dados foram coletados quando um grande tanque de óleo estava sendo carregado

t , min	0	10	20	30	45	60	75
V , 10 ⁶ barris	0,4	0,7	0,77	0,88	1,05	1,17	1,35

Calcule a vazão Q (isto é, dV/dt) para cada instante, com ordem de h^2 .

21.24 A lei de Fourier é usada rotineiramente pelos engenheiros arquitetônicos para determinar o fluxo de calor através de paredes. As seguintes temperaturas foram medidas a partir da superfície ($x = 0$) de uma parede de pedra:

x , m	0	0,08	0,16
T , °C	20,2	17	15

Se o fluxo em $x = 0$ é 60 W/m², calcule k .

21.25 A área da superfície horizontal A_s (m²) de um lago a uma profundidade particular pode ser calculada a partir do volume por derivação:

$$A_s(z) = \frac{dV}{dz}(z)$$

onde V é o volume (m³) e z é a profundidade (m) medida da superfície até o fundo. A concentração média de uma substância que varia com a profundidade, \bar{c} (g/m³), pode ser calculada por integração:

$$\bar{c} = \frac{\int_0^z c(z) A_s(z) dz}{\int_0^z A_s(z) dz}$$

onde Z é a profundidade total (m). Calcule a concentração média com base nos seguintes dados:

z , m	0	4	8	12	16
V , 10 ⁶ m ³	9,8175	5,1051	1,9635	0,3927	0,0000
c , g/m ³	10,2	8,5	7,4	5,2	4,1

21.26 A lei de Faraday caracteriza a queda de tensão através de um indutor como

$$V_L = L \frac{di}{dt}$$

onde V_L é a queda de tensão (V), L é a indutância (em henrys; 1 H = 1 V · s/A), i é a corrente (A) e t é o tempo (s). Determine a queda de tensão como uma função do tempo a partir dos dados seguintes para uma indutância de 4 H.

t	0	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7
i	0	0,16	0,32	0,56	0,84	2,0

21.27 Com base na lei de Faraday (Problema 21.26), use os seguintes dados de tensão para estimar a indutância se uma corrente de 2 A circula através de um indutor por um período de 400 milissegundos.

t , ms	0	10	20	40	60	80	120	180	280	400
V , volts	0	18	29	44	49	46	35	26	15	7

21.28 A taxa de resfriamento de um corpo (Figura P21.28) pode ser expressa por

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$

onde T é a temperatura do corpo (°C), T_a é a temperatura do meio ao redor (°C) e k é uma constante de proporcionalidade (por minuto). Logo, essa equação (chamada de lei de resfriamento de Newton) especifica que a taxa de resfriamento é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a do meio ao redor. Se uma bola de metal aquecida a 80 °C for jogada na água cuja temperatura é mantida constante em $T_a = 20$ °C, a temperatura da bola muda como em

Tempo, min	0	5	10	15	20	25
T , °C	80	44,5	30,0	24,1	21,7	20,7

Utilize derivação numérica para determinar dT/dt em cada instante de tempo. Trace dT/dt versus $T - T_a$ e empregue regressão linear para calcular k .

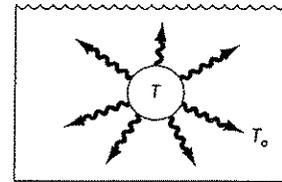


FIGURA P21.28

21.29 A entalpia de um gás real é uma função da pressão como descrito a seguir. Os dados foram tomados para um fluido real. Faça uma estimativa da entalpia do fluido a 400 K e a 50 atm (calcule a integral de 0 atm a 50 atm).

$$H = \int_0^P \left(V - T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \right) dP$$

P , atm	V , L		
	$T = 350$ K	$T = 400$ K	$T = 450$ K
0,1	220	250	282,5
5	4,1	4,7	5,23
10	2,2	2,5	2,7
20	1,35	1,49	1,55
25	1,1	1,2	1,24
30	0,90	0,99	1,03
40	0,68	0,75	0,78
45	0,61	0,675	0,7
50	0,54	0,6	0,62

21.30 Para o escoamento de fluido sobre uma superfície, o fluxo de calor para a superfície pode ser calculado com a lei de Fourier: y é a distância normal à superfície (m). As seguintes medidas foram feitas para o ar que escoou sobre uma placa plana em que y é a distância normal à superfície:

y , cm	0	1	3	5
T , K	900	480	270	210

Se as dimensões da placa são 200 cm de comprimento e 50 cm de largura e $k = 0,028$ J/(s · m · K), (a) determine o fluxo na superfície, e (b) o calor transferido em watts. Observe que 1 J = 1 W · s.

21.31 O gradiente de pressão para escoamento laminar através de um tubo de raio constante é dado por

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{8\mu Q}{\pi r^4}$$

onde p é a pressão (N/m²), x é a distância ao longo do eixo central do tubo (m), μ é a viscosidade dinâmica (N · s/m²), Q é escoamento (m³/s) e r é o raio (m).

(a) Determine a queda de pressão para um tubo de 10 cm de comprimento para um líquido viscoso ($\mu = 0,005$ N · s/m², densidade $\rho = 1 \times 10^3$ kg/m³), com um escoamento de 10×10^{-6} m³/s e os seguintes raios variáveis ao longo de seu comprimento:

x , cm	0	2	4	5	6	7	10
r , mm	2	1,35	1,34	1,6	1,58	1,42	2

(b) Compare seu resultado com a queda de pressão que teria ocorrido se o tubo tivesse um raio constante igual ao raio médio.

(c) Determine o número de Reynolds médio para o tubo para verificar que o escoamento é realmente laminar ($Re = \rho v D / \mu < 2.100$, onde v é a velocidade).

21.32 Os dados a seguir para o calor específico do benzeno foram gerados com um polinômio de grau n . Use derivação numérica para determinar n .

T , K	300	400	500	600
C_p , kJ/(kmol · K)	82,888	112,136	136,933	157,744
T , K	700	800	900	1000
C_p , kJ/(kmol · K)	175,036	189,273	200,923	210,450

21.33 O calor específico em uma pressão constante c_p [J/(kg · K)] de um gás ideal está relacionada à entalpia por

$$c_p = \frac{dh}{dT}$$

onde h é a entalpia (kJ/kg) e T é a temperatura absoluta (K). As seguintes entalpias foram fornecidas para o dióxido de carbono (CO₂) em várias temperaturas. Use esses valores para determinar o calor específico em J/(kg · K) para cada uma das temperaturas tabuladas. Observe que os pesos atômicos do carbono e oxigênio são 12,011 e 15,9994 g/mol, respectivamente.

T , K	750	800	900	1.000
h , kJ/kmol	29.629	32.179	37.405	42.769

21.34 Uma lei de taxa de ordem n é frequentemente utilizada para modelar reações químicas que dependem exclusivamente da concentração de um único reagente:

$$\frac{dc}{dt} = -kc^n$$

onde c é a concentração (mols), t é o tempo (min), n é a ordem da reação (adimensional) e k é a taxa de reação ($\text{min}^{-1} \text{mols}^{1-n}$). O método diferencial pode ser usado para calcular os parâmetros k e n . Isso envolve a aplicação de uma transformada logarítmica para a lei de taxa para produzir,

$$\log\left(-\frac{dc}{dt}\right) = \log k + n \log c$$

Portanto, se uma lei de taxa de ordem n é válida, um gráfico de $\log(-dc/dt)$ versus $\log c$ deveria produzir uma reta com uma inclinação de n e uma interseção de $\log k$. Use o método diferencial e regressão linear pra determinar k e n para os dados a seguir para a conversão de cianato de amônio para ureia:

$t, \text{ min}$	0	5	15	30	45
$c, \text{ mols}$	0,750	0,594	0,420	0,291	0,223

21.35 A demanda de oxigênio no sedimento [SOD - *Sediment Oxygen Demand* - em unidades de $\text{g}/(\text{m}^2 \cdot \text{d})$] é um parâmetro importante na determinação do conteúdo de oxigênio dissolvido em águas naturais. Ele é medido colocando-se um núcleo de sedimento em um recipiente cilíndrico (Figura P21.35). Depois de introduzida cuidadosamente uma camada de água destilada, oxigenada, acima dos sedimentos, o recipiente é coberto para evitar a transferência de gases. Um agitador é usado para misturar a água suavemente, e uma sonda de oxigênio controla como a concentração de oxigênio da água diminui ao longo do tempo. A SOD pode, então, ser calculada como

$$\text{SOD} = -H \frac{do}{dt}$$

onde H é a profundidade da água (m), o é a concentração de oxigênio (g/m^3) e t é o tempo (d).

Com base nos dados a seguir e $H = 0,1$ m, use derivação numérica para gerar gráficos de (a) SOD versus tempo e (b) SOD versus concentração de oxigênio:

$t, \text{ d}$	0	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75
$o, \text{ mg/L}$	10	7,11	4,59	2,57	1,15	0,33	0,03

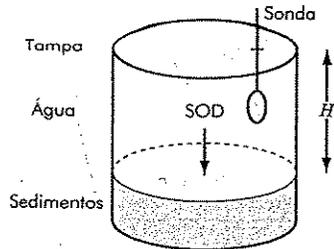


FIGURA P21.35

21.36 As seguintes relações podem ser usadas para analisar vigas uniformes sujeitas a cargas distribuídas:

$$\frac{dy}{dx} = \theta(x) \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{M(x)}{EI} \quad \frac{dM}{dx} = V(x) \quad \frac{dV}{dx} = -w(x)$$

onde x é a distância ao longo da viga (m), y é a deflexão (m), $\theta(x)$ é a inclinação (m/m), E é o módulo de elasticidade ($\text{Pa} = \text{N}/\text{m}^2$), I é o momento de inércia (m^4), $M(x)$ é o momento (N m), $V(x)$ é a força de cisalhamento (N) e $w(x)$ é a carga distribuída (N/m). Para o caso de uma carga linearmente crescente (lembre-se da Figura P5.13), a inclinação pode ser calculada analiticamente como

$$\theta(x) = \frac{w_0}{120EIL} (-5x^4 + 6L^2x^2 - L^4) \quad (\text{P21.36})$$

Empregue (a) integração numérica para calcular a deflexão (em m), e (b) derivação numérica para calcular o momento (em N m) e a força de cisalhamento (em N). Tome como base para seus cálculos numéricos os valores da inclinação calculados com a Equação (P21.36) em intervalos igualmente espaçados de $\Delta x = 0,125$ m ao longo de uma viga de 3 m. Use os seguintes parâmetros em seus cálculos: $E = 200$ GPa, $I = 0,0003$ m^4 e $w_0 = 2,5$ kN/cm. Além disso, as deflexões nas extremidades da viga são definidas como $y(0) = y(L) = 0$. Seja cuidadoso com as unidades.

21.37 Você mediu as seguintes deflexões ao longo do comprimento de uma viga uniforme simplesmente apoiada (ver Problema 21.36)

$x, \text{ m}$	0	0,375	0,75	1,125	1,5
$y, \text{ cm}$	0	-0,2571	-0,9484	-1,9689	-3,2262
$x, \text{ m}$	1,875	2,25	2,625	3	
$y, \text{ cm}$	-4,6414	-6,1503	-7,7051	-9,275	

Empregue derivação numérica para calcular a inclinação, o momento (em N m), a força de cisalha-

mento (em N) e a carga distribuída (em N/m). Use os seguintes valores de parâmetros em seus cálculos: $E = 200$ GPa e $I = 0,0003$ m^4 .

21.38 Calcule $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ e $\partial^2 f/(\partial x \partial y)$ para a função a seguir em $x = y = 1$ (a) analiticamente e (b) numericamente com $\Delta x = \Delta y = 0,0001$:

$$f(x, y) = 3xy + 3x - x^3 - 3y^3$$

21.39 Desenvolva um programa no MATLAB para gerar os mesmos cálculos e gráficos como na Seção 21.8, mas para as seguintes funções (para $x = -3$ a 3 e $y = -3$ a 3): (a) $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ e (b) $f(x, y) = xe^{-(x^2+y^2)}$.

21.40 Desenvolva um programa no MATLAB para gerar os mesmos cálculos e gráficos como na Seção 21.8, mas para a função `peaks` do MATLAB, ao longo do intervalo de -3 a 3 para x e y .

►► PROBLEMAS

22.1 Resolva o seguinte problema de valor inicial no intervalo de $t = 0$ a 2 em que $y(0) = 1$. Mostre todos seus resultados em um mesmo gráfico.

$$\frac{dy}{dt} = yt^3 - 1,5y$$

- (a) Analiticamente.
- (b) Usando o método de Euler, com $h = 0,5$ e $0,25$.
- (c) Usando o método do ponto médio, com $h = 0,5$.
- (d) Usando o método RK de quarta ordem, com $h = 0,5$.

22.2 Resolva o seguinte problema no intervalo de $x = 0$ a 1, em que $y(0) = 1$, usando um tamanho de passo de $0,25$. Mostre todos seus resultados em um mesmo gráfico.

$$\frac{dy}{dx} = (1 + 4x)\sqrt{y}$$

- (a) Analiticamente.
- (b) Usando o método de Euler.
- (c) Usando o método de Heun sem iteração.

(d) Usando o método de Ralston.

(e) Usando o método RK de quarta ordem.

22.3 Resolva o seguinte problema no intervalo de $t = 0$ a 2, em que $y(0) = 1$, usando um tamanho de passo de $0,5$. Mostre todos seus resultados em um mesmo gráfico.

$$\frac{dy}{dt} = -2y + t^2$$

Obtenha suas soluções com (a) o método de Heun, sem iteração do corretor, (b) o método de Heun, com iteração do corretor, até que $\varepsilon_r < 0,1\%$, (c) o método do ponto médio, e (d) o método de Ralston.

22.4 O crescimento de populações de organismos tem várias aplicações na engenharia e na ciência. Um dos modelos mais simples considera que a taxa de variação da população p é proporcional à população em qualquer tempo t :

$$\frac{dp}{dt} = k_g p \quad (\text{P22.4.1})$$

onde k_g é a taxa de crescimento. A população mundial em milhões de 1950 até 2000 era

t	1950	1955	1960	1965	1970	1975
p	2.560	2.780	3.040	3.350	3.710	4.090
t	1980	1985	1990	1995	2000	
p	4.450	4.850	5.280	5.690	6.080	

- (a) Considerando que a Equação (P22.4.1) é válida, use os dados de 1950 até 1970 para estimar k_g .
- (b) Use o método RK de quarta ordem com os resultados de (a) para simular a população mundial de 1950 a 2050, com um tamanho de passo de 5 anos. Mostre os resultados de simulação com os dados em um gráfico.

22.5 Embora o modelo no Problema 22.4 funcione adequadamente quando o crescimento da população é ilimitado, ele falha quando fatores como escassez de alimentos, poluição e falta de espaço inibem o crescimento. Nesses casos, a taxa de crescimento não é uma constante, mas pode ser formulada como

$$k_g = k_{gm}(1 - p/p_{max})$$

onde k_{gm} é a taxa de crescimento máxima sob condições ilimitadas, p é a população e p_{max} é a população máxima. Observe que p_{max} é algumas vezes chamada *capacidade de carga*. Assim, para uma baixa densidade populacional $p \ll p_{max}$, $k_g \rightarrow k_{gm}$. À medida que p se aproxima de p_{max} , a taxa de crescimento aproxima-se de zero. Usando essa formulação da taxa de crescimento, a taxa de variação de uma população pode ser modelada como

$$\frac{dp}{dt} = k_{gm}(1 - p/p_{max})p$$

Essa equação é conhecida como *modelo logístico*. A solução analítica desse modelo é

$$p = p_0 \frac{p_{max}}{p_0 + (p_{max} - p_0)e^{-k_{gm}t}}$$

Simule a população mundial de 1950 a 2050 usando (a) a solução analítica, e (b) o método RK de quarta ordem com um tamanho de passo de 5 anos. Empregue as seguintes condições iniciais e valores de parâmetros para sua simulação: p_0 (em 1950) = 2.560 milhões de pessoas, $k_{gm} = 0,026/\text{ano}$ e $p_{max} = 12.000$ milhões de pessoas. Mostre seus resultados em um gráfico com os dados do Problema 22.4.

22.6 Considere que um projétil seja lançado para cima da superfície da Terra e que a única força que está agindo no objeto seja a força gravitacio-

nal para baixo. Nessas condições, um balanço de forças pode ser usado para deduzir que

$$\frac{dv}{dt} = -g(0) \frac{R^2}{(R+x)^2}$$

onde v é a velocidade para cima (m/s), t é o tempo (s), x é a altitude (m) medida para cima a partir da superfície da Terra, $g(0)$ é a aceleração gravitacional na superfície da Terra ($\cong 9,81 \text{ m/s}^2$) e R é o raio da Terra ($\cong 6,37 \times 10^6 \text{ m}$). Percebendo que $dx/dt = v$, use o método de Euler para determinar a altura máxima que seria atingida se $v(t) = 1500 \text{ m/s}$.

22.7 Resolva o seguinte par de EDOS no intervalo de $t = 0$ a 0,4 usando um tamanho de passo de 0,1. As condições iniciais são $y(0) = 2$ e $z(0) = 4$. Obtenha sua solução com (a) o método de Euler e (b) o método RK de quarta ordem. Mostre seus resultados em um gráfico.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -2y + 5e^{-t} \\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{yz^2}{2} \end{aligned}$$

22.8 A equação de van der Pol é um modelo de um circuito eletrônico que surgiu nos tempos de tubos de vácuo:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - (1 - y^2)\frac{dy}{dt} + y = 0$$

Dadas as condições iniciais, $y(0) = y'(0) = 0$, resolva essa equação de $t = 0$ a 10, por meio do método de Euler, com um tamanho de passo de (a) 0,25 e (b) 0,125. Trace ambas as soluções no mesmo gráfico.

22.9 Dadas as condições iniciais $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$, resolva o seguinte problema de valor inicial de $t = 0$ a 4:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 0$$

Obtenha sua solução com (a) o método de Euler e (b) o método RK de quarta ordem. Em ambos os casos, use um tamanho de passo de 0,1. Trace ambas as soluções no mesmo gráfico com a solução exata $y = \cos 2t$.

22.10 Desenvolva um arquivo-M para resolver uma única EDO com o método de Heun com iteração. Projete o arquivo-M de modo que ele gere um gráfico dos resultados. Teste seu programa utilizando-o para determinar a população como descrito no Problema 22.5. Empregue um tamanho de passo de 5 anos e itere o corretor até que $\epsilon_s < 0,1\%$.

22.11 Desenvolva um arquivo-M para resolver uma única EDO com o método do ponto médio. Projete o arquivo-M de modo que ele gere um gráfico dos resultados. Teste seu programa utilizando-o para determinar a população como descrito no Problema 22.5. Empregue um tamanho de passo de 5 anos.

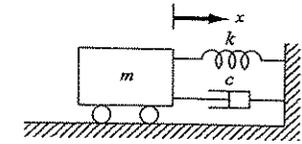


FIGURA P22.15

22.12 Desenvolva um arquivo-M para resolver uma única EDO com o método RK de quarta ordem. Projete o arquivo-M de modo que ele gere um gráfico dos resultados. Teste seu programa utilizando-o para resolver o Problema 22.2. Empregue um tamanho de passo de 0,1.

22.13 Desenvolva um arquivo-M para resolver um sistema de EDOS com o método de Euler. Projete seu programa de modo que ele gere um gráfico dos resultados. Teste seu programa utilizando-o para resolver o Problema 22.7 com um tamanho de passo de 0,25.

22.14 O *Isle Royale National Park* é um arquipélago de 210 milhas quadradas composto por uma única ilha grande e por muitas ilhas pequenas no Lago Superior. Os alces chegaram em torno de 1900 e, por volta de 1930, sua população se aproximou de 3.000, destruindo a vegetação. Em 1949, lobos cruzaram uma ponte de gelo a partir de Ontário. A partir do final da década de 1950, o número de alces e lobos foi monitorado.

- (a) Integre as equações de Lotka-Volterra (Seção 22.6) de 1960 até 2020 usando os seguintes valores de coeficientes: $a = 0,23$, $b = 0,0133$, $c = 0,4$ e $d = 0,0004$. Compare sua simulação com os dados usando um gráfico em função do tempo e determine a soma dos quadrados dos resíduos entre seu modelo e os dados, tanto para os alces quanto para os lobos.

(b) Trace o plano de fases de sua solução.

22.15 O movimento de um sistema massa-mola amortecido (Figura P22.15) é descrito pela seguinte equação diferencial ordinária:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

onde x é o deslocamento a partir da posição de equilíbrio (m), t é o tempo (s), $m = 20 \text{ kg}$ é massa e c é o coeficiente de amortecimento ($\text{N} \cdot \text{s/m}$). O coeficiente de amortecimento c toma os três valores

Ano	Alces	Lobos	Ano	Alces	Lobos	Ano	Alces	Lobos
1959	563	20	1975	1.355	41	1991	1.313	12
1960	610	22	1976	1.282	44	1992	1.590	12
1961	628	22	1977	1.143	34	1993	1.879	13
1962	639	23	1978	1.001	40	1994	1.770	17
1963	663	20	1979	1.028	43	1995	2.422	16
1964	707	26	1980	910	50	1996	1.163	22
1965	733	28	1981	863	30	1997	500	24
1966	765	26	1982	872	14	1998	699	14
1967	912	22	1983	932	23	1999	750	25
1968	1.042	22	1984	1.038	24	2000	850	29
1969	1.268	17	1985	1.115	22	2001	900	19
1970	1.295	18	1986	1.192	20	2002	1.100	17
1971	1.439	20	1987	1.268	16	2003	900	19
1972	1.493	23	1988	1.335	12	2004	750	29
1973	1.435	24	1989	1.397	12	2005	540	30
1974	1.467	31	1990	1.216	15	2006	450	30

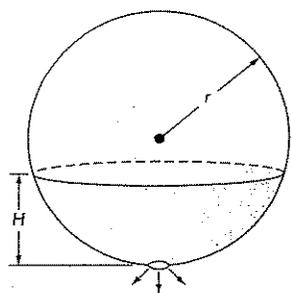


FIGURA P22.16 Tanque esférico.

de 5 (subamortecido), 40 (criticamente amortecido) e 200 (superamortecido). A constante da mola $k = 20$ N/m. A velocidade inicial é zero e o deslocamento inicial é $x = 1$. Resolva essa equação usando um método numérico no período de tempo $0 \leq t \leq 15$ s. Faça um gráfico do deslocamento em função do tempo para cada um dos três valores de coeficiente de amortecimento.

22.16 Um tanque esférico tem um orifício circular no fundo pelo qual o líquido escoava para fora (Figura P22.16). A vazão pelo buraco pode ser estimada por

$$Q_{\text{fora}} = CA\sqrt{2gh}$$

onde Q_{fora} é o escoamento para fora (m^3/s), C é um coeficiente obtido empiricamente, A é a área do orifício (m^2), g é a constante gravitacional ($= 9,81 \text{ m/s}^2$) e h é a profundidade do líquido no tanque. Use um dos métodos numéricos descritos neste capítulo para determinar quanto tempo levará para que a água escoar para fora de um tanque de 3 m de diâmetro com uma altura inicial de 2,75 m. Observe que o orifício tem um diâmetro de 3 m e $C = 0,55$.

22.17 Na investigação de homicídio ou de morte accidental, em geral, é importante determinar o momento da morte. De observações experimentais, sabe-se que a temperatura da superfície de um objeto varia a uma taxa proporcional à diferença entre a temperatura do objeto e a do meio que o cerca ou a temperatura ambiente. Isso é conhecido como a lei de resfriamento de Newton. Assim, se $T(t)$ for a temperatura do objeto no instante t e T_a for a temperatura constante do ambiente:

$$\frac{dT}{dt} = -K(T - T_a)$$

onde $K > 0$ é uma constante de proporcionalidade.

Considere que, no instante $t = 0$, um corpo seja descoberto e que sua temperatura medida seja T_0 ; que no instante de sua morte, a temperatura do corpo, T_p , tinha o valor normal de 37°C ; que a temperatura do corpo, quando foi descoberto, era de $29,5^\circ\text{C}$ e que duas horas depois era de $23,5^\circ\text{C}$. A temperatura ambiente é 20°C .

- (a) Determine K e o momento da morte.
- (b) Resolva a EDO numericamente e trace seus resultados.

22.18 A reação $A \rightarrow B$ ocorre em dois reatores em série. Os reatores estão bem misturados, mas não estão no estado estacionário. O balanço de massa para cada reator de tanque agitado é mostrado a seguir:

$$\frac{dCA_1}{dt} = \frac{1}{\tau}(CA_0 - CA_1) - kCA_1$$

$$\frac{dCB_1}{dt} = -\frac{1}{\tau}CB_1 + kCA_1$$

$$\frac{dCA_2}{dt} = \frac{1}{\tau}(CA_1 - CA_2) - kCA_2$$

$$\frac{dCB_2}{dt} = \frac{1}{\tau}(CB_1 - CB_2) + kCA_2$$

onde CA_0 é a concentração de A na entrada do primeiro reator, CA_1 é a concentração de A na saída do primeiro reator (e na entrada do segundo), CA_2 é a concentração de A na saída do segundo reator, CB_1 é a concentração de B na saída do primeiro reator (e na entrada do segundo), CB_2 é concentração de B no segundo reator, τ é o tempo de residência para cada reator e k é a taxa constante para a reação de A produzir B . Se CA_0 for igual a 20, encontre as concentrações de A e B em ambos os reatores durante os primeiros 10 minutos de operação. Use $k = 0,12/\text{min}$ e $\tau = 5$ min e considere que as condições iniciais de todas as variáveis dependentes sejam zero.

22.19 Um reator de batelada pode ser descrito pelas seguintes equações:

$$\frac{dC}{dt} = -e^{-10(T+273)} C$$

$$\frac{dT}{dt} = 1,000e^{-10(T+273)} C - 10(T - 20)$$

onde C é a concentração do reagente e T é a temperatura do reator. A princípio, o reator está a 16°C e tem uma concentração do reagente C de $1,0 \text{ gmol/L}$. Encontre a concentração e a temperatura do reator como uma função do tempo.

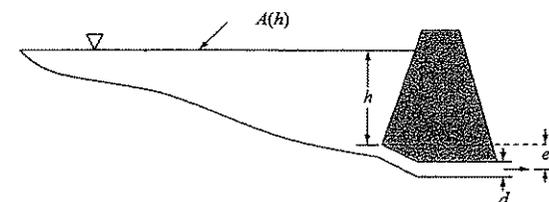


FIGURA P22.21

22.20 A seguinte equação pode ser usada para modelar a deflexão do mastro da vela de um barco sujeito à força do vento:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{f(z)}{2EI}(L - z)^2$$

onde $f(z)$ é a força do vento, E é o módulo de elasticidade, L é o comprimento do mastro e I é o momento de inércia. Considere que a força varia com a altura de acordo com

$$f(z) = \frac{200z}{5+z} e^{-2z/30}$$

Calcule a deflexão se $y = 0$ e $dy/dz = 0$ em $z = 0$. Use valores de parâmetros de $L = 30$, $E = 1,3 \times 10^8$ e $I = 0,05$ para seus cálculos.

22.21 Um reservatório de água é drenado por um tubo, como mostra a Figura P22.21. Sob diversas hipóteses simplificadoras, a seguinte equação diferencial descreve como a profundidade varia com o tempo:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\pi d^2}{4A(h)} \sqrt{2g(h+e)}$$

onde h é a profundidade (m), t é o tempo (s), d é o diâmetro do tubo (m), $A(h)$ é a área da superfície do reservatório como uma função da profundidade (m^2), g é a constante gravitacional ($= 9,81 \text{ m/s}^2$) e e é a profundidade da saída do tubo abaixo do fundo do reservatório (m). Com base na seguinte tabela da área-profundidade, resolva essa equação diferencial para determinar quanto tempo leva para o reservatório esvaziar-se, dado que $h(0) = 6$ m, $d = 0,25$ m e $e = 1$ m.

h , (m)	6	5	4	3	2	1	0
$A(h)$, 10^4 m^2	1,17	0,97	0,67	0,45	0,32	0,18	0

22.22 Engenheiros e cientistas usam modelos massa-mola para desenvolver uma percepção da dinâmica de estruturas sob a influência de distúrbios, tais como terremotos. A Figura P22.22 mostra essa representação para um edifício de três andares.

Nesse caso, a análise é limitada ao movimento horizontal das estruturas. Utilizando a segunda lei de Newton, os balanços de força podem ser escritos para esse sistema como

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{k_1}{m_1}x_1 + \frac{k_2}{m_1}(x_2 - x_1)$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{k_2}{m_2}(x_1 - x_2) + \frac{k_3}{m_2}(x_3 - x_2)$$

$$\frac{d^2x_3}{dt^2} = \frac{k_3}{m_3}(x_2 - x_3)$$

Simule a dinâmica dessa estrutura de $t = 0$ a 20 s, dada a condição inicial que a velocidade do andar térreo é $dx/dt = 1$ m/s e todos os outros valores iniciais de deslocamentos e velocidades são zero. Apresente seus resultados como dois gráficos em função do tempo (a) dos deslocamentos e (b) das velocidades. Além disso, desenvolva um gráfico de plano de fase tridimensional dos deslocamentos.

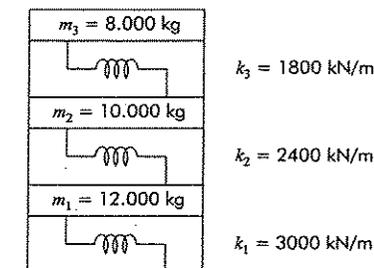


FIGURA P22.22

22.23 Repita as mesmas simulações como na Seção 22.6 para as equações de Lorenz, porém gere as soluções com o método do ponto médio.

22.24 Faça as mesmas simulações como na Seção 22.6 para as equações de Lorenz, porém use um valor de $r = 99,96$. Compare seus resultados com aqueles obtidos na Seção 22.6.

►► PROBLEMAS

23.1 Repita as mesmas simulações como na Seção 23.5 para a fonte de Plínio, mas gere as soluções com `ode23`, `ode23s` e `ode113`. Use o comando `subplot` para desenvolver um gráfico com três painéis verticais da solução em função do tempo.

23.2 As EDOs seguintes foram propostas como um modelo de uma epidemia:

$$\frac{dS}{dt} = -aSI$$

$$\frac{dI}{dt} = aSI - rI$$

$$\frac{dR}{dt} = rI$$

onde S são os indivíduos suscetíveis, I os infectados, R os recuperados, a é a taxa de infecção e r é a taxa de recuperação. Uma cidade tem 10.000 pessoas, e todas elas são suscetíveis.

- (a) Se um único indivíduo infectado entra na cidade em $t = 0$, calcule a progressão da epidemia até que o número de indivíduos infectado caia abaixo de 10. Use os seguintes parâmetros: $a = 0,002/(\text{pessoa} \cdot \text{semana})$ e $r = 0,15/\text{d}$. Desenvolva gráficos da solução em função do tempo de todas as variáveis de estado. Também, gere um gráfico do plano de estados de S versus I versus R .
- (b) Considere que, depois da recuperação, há uma perda de imunidade que torna indivíduos suscetíveis. Esse mecanismo de reinfeção pode ser calculado como ρR , onde ρ é a taxa de reinfeção. Modifique o modelo para incluir esse mecanismo e repita os cálculos em (a) usando $\rho = 0,03/\text{d}$.

23.3 Resolva o seguinte problema de valor inicial no intervalo de $t = 2$ a 3:

$$\frac{dy}{dt} = -0,5y + e^{-t}$$

Use o método de Heun de início não automático com um tamanho de passo de 0,5 e condições iniciais de $y(1,5) = 5,222138$ e $y(2,0) = 4,143883$. Itere o corretor para $\epsilon_r = 0,1\%$. Calcule os erros relativos percentuais para seus resultados com base nas soluções exatas obtidas analiticamente: $y(2,5) = 3,273888$ e $y(3) = 2,577988$.

23.4 Resolva o seguinte problema de valor inicial no intervalo de $t = 0$ a 0,5

$$\frac{dy}{dt} = yt^2 - y$$

Use o método RK de quarta ordem para prever o primeiro valor em $t = 0,25$. Depois, utilize o método de Heun de início não automático para fazer a predição em $t = 0,5$. Observação: $y(0) = 1$.

23.5 Dado

$$\frac{dy}{dt} = -100.000y + 99.999e^{-t}$$

- (a) Estime o tamanho do passo necessário para manter estabilidade por meio do método de Euler explícito.
- (b) Se $y(0) = 0$, use o Euler implícito para obter uma solução de $t = 0$ a 2 usando um tamanho de passo de 0,1.

23.6 Dado

$$\frac{dy}{dt} = 30(\sin t - y) + 3 \cos t$$

Se $y(0) = 0$, use o Euler implícito para obter uma solução de $t = 0$ a 4 usando um tamanho de passo de 0,4.

23.7 Dado

$$\frac{dx_1}{dt} = 999x_1 + 1999x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -1000x_1 - 2000x_2$$

Se $x_1(0) = x_2(0) = 1$, obtenha uma solução de $t = 0$ a 0,2 usando um tamanho de passo de 0,05 com os métodos de Euler (a) explícito e (b) implícito.

23.8 A seguinte EDO parasitária, não linear, foi sugerida por Hornbeck (1975):

$$\frac{dy}{dt} = 5(y - t^2)$$

Se a condição inicial é $y(0) = 0,08$, obtenha uma solução de $t = 0$ a 5:

- (a) Analiticamente.
- (b) Usando o método RK de quarta ordem com um tamanho de passo constante de 0,03125.
- (c) Usando a função do MATLAB `ode45`.
- (d) Usando a função do MATLAB `ode23s`.
- (e) Usando a função do MATLAB `ode23tb`.

Apresente seus resultados na forma de gráficos.

23.9 Lembre-se, do Exemplo 20.5, que a função `humps` seguinte exhibe tanto regiões planas quanto íngremes em um intervalo relativamente curto de x ,

$$f(x) = \frac{1}{(x - 0,3)^2 + 0,01} + \frac{1}{(x - 0,9)^2 + 0,04} - 6$$

Determine o valor da integral definida dessa função entre $x = 0$ e 1 usando as funções (a) `quad` e (b) `ode45`.

23.10 As oscilações de um pêndulo podem ser simuladas com o modelo não linear seguinte:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0$$

onde θ é o ângulo de deslocamento, g é a aceleração da gravidade e l é o comprimento do pêndulo. Para pequenos deslocamentos angulares, o $\sin\theta$ é aproximadamente igual a θ e o modelo pode ser linearizado como

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

Use a função `ode45` para determinar θ como uma função do tempo para ambos os modelos linear e não linear, sendo $l = 0,6$ m e $g = 9,81$ m/s². Primeiro, resolva para o caso em que a condição inicial é para um deslocamento pequeno ($\theta = \pi/8$ e $d\theta/dt = 0$). Em seguida, repita o cálculo para um deslocamento grande ($\theta = \pi/2$). Para cada caso, trace as simulações linear e não linear no mesmo gráfico.

23.11 Empregue a opção `events` descrita na Seção 23.1.2 para determinar o período de um pêndulo linear de 1 m de comprimento (ver descrição no Problema 23.10). Calcule o período para as seguintes condições iniciais: (a) $\theta = \pi/8$, (b) $\theta = \pi/4$, e (c) $\theta = \pi/2$. Para os três casos, defina a velocidade angular inicial igual a zero. (Sugestão: Uma boa maneira de calcular o período é determinar quanto tempo o pêndulo leva para chegar em $\theta = 0$ [isto é, a parte inferior de seu arco]). O período é igual a quatro vezes esse valor.

23.12 Repita o Problema 23.11, mas para o pêndulo não linear descrito no Problema 23.10.

23.13 O sistema seguinte é um exemplo clássico de EDOs rígidas, que podem ocorrer na solução problemas de cinética de reações químicas:

$$\frac{dc_1}{dt} = -0,013c_1 - 1000c_1c_3$$

$$\frac{dc_2}{dt} = -2500c_2c_3$$

$$\frac{dc_3}{dt} = -0,013c_1 - 1000c_1c_3 - 2500c_2c_3$$

Resolva essas equações de $t = 0$ a 50, com condições iniciais $c_1(0) = c_2(0) = 1$ e $c_3(0) = 0$. Também, utilize as funções padrões (por exemplo, `ode45`) e rígidas (por exemplo, `ode23s`) do MATLAB para obter suas soluções.

23.14 A EDO de segunda ordem seguinte é considerada não linear:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -1001 \frac{dy}{dx} - 1000y$$

Resolva essa equação diferencial (a) analiticamente e (b) numericamente para $x = 0$ a 5. Para (b) use uma abordagem implícita com $h = 0,5$. Observe que as condições iniciais são $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$. Apresente ambos os resultados em um gráfico.

23.15 Considere uma haste fina de comprimento l se movendo no plano xy , como mostra a Figura P23.15. A haste está fixada por um pinô em uma extremidade e existe uma massa na outra. Observe que $g = 9,81$ m/s² e $l = 0,5$ m. Esse sistema pode ser resolvido por meio de

$$\ddot{\theta} - \frac{g}{l} \theta = 0$$

Seja $\theta = 0$ e $\dot{\theta} = 0,25$ rad/s. Resolva por meio de qualquer método estudado neste capítulo. Faça um gráfico do ângulo em função do tempo e da velocidade angular em função do tempo. (Sugestão: Decomponha a EDO de segunda ordem).

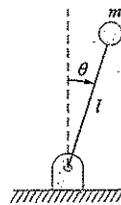


FIGURA P23.15

23.16 Dada a EDO de primeira ordem:

$$\frac{dx}{dt} = -700x - 1000e^{-t}$$

$$x(t = 0) = 4$$

Resolva essa equação diferencial usando um método numérico para o período de tempo $0 \leq t \leq 5$. Também, resolva analiticamente e trace as soluções analítica e numérica para o transiente rápido e a fase de transição lenta da escala de tempo.

23.17 Resolva a seguinte equação diferencial de $t = 0$ a 2

$$\frac{dy}{dt} = -10y$$

com a condição inicial $y(0) = 1$. Use as técnicas seguintes para obter suas soluções: (a) analiticamente, (b) o método de Euler explícito, e (c) o método de Euler implícito. Para (b) e (c) use $h = 0,1$ e $0,2$. Trace seus resultados.

23.18 As equações de Lotka-Volterra descritas na Seção 22.6 foram refinadas para incluir fatores adicionais que impactam na dinâmica predador-presa. Por exemplo, além da predação, a população de presa pode ser limitada por outros fatores tais como espaço. A limitação de espaço pode ser incorporada no modelo como uma capacidade de carga (lembre-se do modelo logístico descrito no Problema 22.5) como em

$$\frac{dx}{dt} = a \left(1 - \frac{x}{K}\right) x - bxy$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy$$

onde K é a capacidade de carga. Use os mesmos valores de parâmetros e condições iniciais, como na Seção 22.6, para integrar essas equações de $t = 0$ a 100, usando a função `ode45` e desenvolva gráficos dos resultados em função do tempo e do plano de fases.

(a) Empregue um valor muito grande de $K = 10^8$ para confirmar que você obtém os mesmos resultados como na Seção 22.6.

(b) Compare (a) com a capacidade de carga mais realista de $K = 200$. Discuta seus resultados.

23.19 Duas massas são presas a uma parede por molas lineares (Figura P23.19). Balanços de forças com base na segunda lei de Newton podem ser escritos como

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{k_1}{m_1}(x_1 - L_1) + \frac{k_2}{m_1}(x_2 - x_1 - w_1 - L_2)$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -\frac{k_2}{m_2}(x_2 - x_1 - w_1 - L_2)$$

onde k é a constante das molas, m é a massa, L é o comprimento da mola não esticada e w é a largura da massa. Calcule as posições das massas como uma função do tempo usando os seguintes valores de parâmetros: $k_1 = k_2 = 5$, $m_1 = m_2 = 2$, $w_1 = w_2 = 5$ e $L_1 = L_2 = 2$. Defina as condições iniciais como $x_1 = L_1$ e $x_2 = L_1 + w_1 + L_2 + 6$. Efetue a simulação de $t = 0$ a 20. Faça gráficos em função do tempo para ambos os deslocamentos e ambas as velocidades. Faça também um gráfico de plano de fases de x_1 versus x_2 .

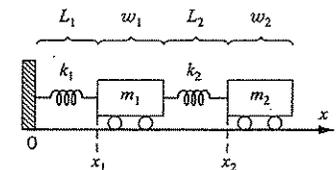


FIGURA P23.19

23.20 Use a função `ode45` para integrar as equações diferenciais para o sistema descrito no Problema 23.19. Gere gráficos (subplots) verticalmente dispostos dos deslocamentos (parte superior) e das velocidades (parte inferior). Empregue a função `fft` para calcular a transformada discreta de Fourier do deslocamento da primeira massa. Gere e trace um espectro de potência para identificar as frequências de ressonância do sistema.

23.21 Efetue os mesmos cálculos como no Problema 23.20, mas com base no primeiro andar da estrutura no Problema 22.22.

23.22 Use a abordagem e o exemplo descritos na Seção 23.1.2, mas determine o tempo, a altura e a velocidade quando o saltador de *bungee jumping* está o mais distante acima do chão, e gere um gráfico da solução.

►► PROBLEMAS

24.1 Um balanço de calor em estado estacionário para uma haste pode ser representado por

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - 0,15T = 0$$

Obtenha uma solução para uma haste de 10 m com $T(0) = 240$ e $T(10) = 150$ (a) analiticamente, (b) com o método do tiro, e (c) usando a abordagem por diferenças finitas com $\Delta x = 1$.

24.2 Repita o Problema 24.1, mas com a extremidade direita isolada e a temperatura da extremidade esquerda fixa em 240.

24.3 Use o método do tiro para resolver

$$7 \frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} - y + x = 0$$

com as condições de contorno $y(0) = 5$ e $y(20) = 8$.

24.4 Resolva o Problema 24.3 com a abordagem de diferenças finitas usando $\Delta x = 2$.

24.5 A equação diferencial não linear seguinte foi resolvida nos Exemplos 24.4 e 24.7.

$$0 = \frac{d^2 T}{dx^2} + h'(T_\infty - T) + \sigma'(T_\infty^4 - T^4) \quad (\text{P24.5})$$

Essas equações são às vezes linearizadas para obter uma solução aproximada. Isso é feito empregando-se uma expansão em série de Taylor de primeira ordem para linearizar o termo elevado à quarta potência na equação como

$$\sigma' T^4 = \sigma' \bar{T}^4 + 4\sigma' \bar{T}^3 (T - \bar{T})$$

onde \bar{T} é uma temperatura base em relação a qual o termo é linearizado. Substitua essa relação na Equação (P24.5) e então resolva a equação linear resultante com a abordagem de diferenças finitas. Empregue $\bar{T} = 300$, $\Delta x = 1$ m e os parâmetros do Exemplo 24.4 para obter sua solução. Trace os resultados junto àqueles obtidos para as versões não lineares nos Exemplos 24.4 e 24.7.

24.6 Desenvolva um arquivo-M para implementar o método do tiro para uma EDO de segunda ordem linear. Teste seu programa refazendo o Exemplo 24.2.

24.7 Desenvolva um arquivo-M para implementar a abordagem de diferenças finitas para resolução de uma EDO de segunda ordem linear com condições de contorno de Dirichlet. Teste-o refazendo o Exemplo 24.5.

24.8 Uma haste aquecida isolada com uma fonte de calor uniforme pode ser modelada com a equação de Poisson:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = -f(x)$$

Dada uma fonte de calor $f(x) = 25^\circ\text{C}/\text{m}^2$ e as condições de contorno $T(x=0) = 40^\circ\text{C}$ e $T(x=10) = 200^\circ\text{C}$, determine a distribuição de temperaturas com (a) o método do tiro e (b) o método de diferenças finitas ($\Delta x = 2$).

24.9 Repita o Problema 24.8, mas para a seguinte fonte de calor variável no espaço: $f(x) = 0,12x^3 - 2,4x^2 + 12x$.

24.10 A distribuição de temperaturas em uma aleta de refrigeração cônica (Figura P24.10) é descrita pela equação diferencial seguinte, que foi adimensionalizada:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \left(\frac{2}{x}\right) \left(\frac{du}{dx} - pu\right) = 0$$

onde u é a temperatura ($0 \leq u \leq 1$), x é a distância axial ($0 \leq x \leq 1$) e p é um parâmetro adimensional que descreve a transferência de calor e a geometria:

$$p = \frac{hL}{k} \sqrt{1 + \frac{4}{2m^2}}$$

onde h é o coeficiente de transferência de calor, k é a condutividade térmica, L é o comprimento ou a altura do cone e m é a inclinação da parede do cone. Essa equação tem as condições de contorno:

$$u(x=0) = 0 \quad u(x=1) = 1$$

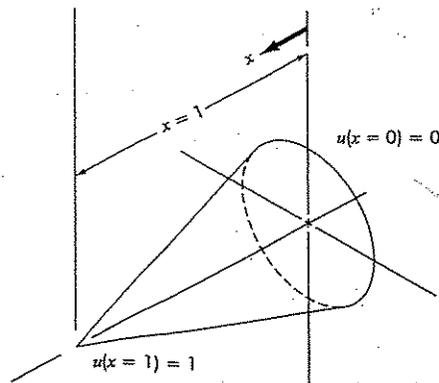


FIGURA P24.10

Resolva essa equação para a distribuição de temperaturas usando o método de diferenças finitas. Use para as derivadas diferenças finitas acuradas até segunda ordem. Escreva um programa para obter a solução e trace a temperatura versus a distância axial para os diversos valores de $p = 10, 20, 50$ e 100 .

24.11 O composto A difunde-se por meio de um tubo de 4 cm de comprimento e reage à medida que é difundido. A equação que rege a difusão com reação é

$$D \frac{d^2 A}{dx^2} - kA = 0$$

Em uma extremidade do tubo ($x = 0$), existe uma grande fonte de A que resulta em uma concentração fixa de $0,1 \text{ M}$. Na outra extremidade do tubo, existe um material que absorve rapidamente qualquer A , tornando a concentração 0 M . Se $D = 1,5 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{s}$ e $k = 5 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$, qual é a concentração de A como função da distância no tubo?

24.12 A equação diferencial seguinte descreve a concentração em estado estacionário de uma substância que reage com cinética de primeira ordem, em um reator de fluxo em pistão axialmente disperso (Figura P24.12):

$$D \frac{d^2 c}{dx^2} - U \frac{dc}{dx} - kc = 0$$

onde D é o coeficiente de dispersão (m^2/h), c é a concentração (mol/L), x é a distância (m), U é a velocidade (m/h) e k é a taxa de reação ($1/\text{h}$). As condições de contorno podem ser formuladas como

$$Uc_{\text{entrada}} = Uc(x=0) - D \frac{dc}{dx}(x=0)$$

$$\frac{dc}{dx}(x=L) = 0$$

onde c_{entrada} é a concentração na entrada do fluxo (mol/L) e L é o comprimento do reator. Essas condições são chamadas condições de contorno de Danckwerts.

Use a abordagem por diferenças finitas para determinar a concentração como uma função da distância dados os parâmetros seguintes: $D = 5000 \text{ m}^2/\text{h}$, $U = 100 \text{ m}/\text{h}$, $k = 2/\text{h}$, $L = 100 \text{ m}$ e $c_{\text{entrada}} = 100 \text{ mol}/\text{L}$. Utilize aproximações por diferenças finitas centradas, com $\Delta x = 10 \text{ m}$, para obter suas soluções. Compare seus resultados numéricos com a solução analítica:

$$c = \frac{Uc_{\text{entrada}}}{(U - D\lambda_1)\lambda_2 e^{\lambda_2 L} - (U - D\lambda_2)\lambda_1 e^{\lambda_1 L}} \times (\lambda_2 e^{\lambda_2 L} e^{\lambda_1 x} - \lambda_1 e^{\lambda_1 L} e^{\lambda_2 x})$$

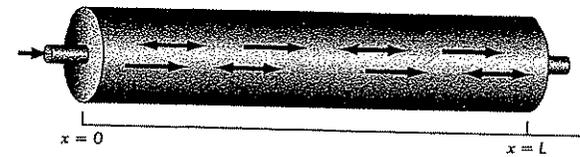
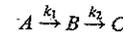


FIGURA P24.12 Reator de fluxo em pistão axialmente disperso.

onde

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{U}{2D} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4kD}{U^2}} \right)$$

24.13 Uma série reações em fase líquida, de primeira ordem, cria um produto desejável (B) e um subproduto indesejável (C):



Se as reações ocorrem em um reator de fluxo em pistão axialmente disperso (Figura P24.12), balanços de massa podem ser usados para desenvolver as seguintes EDOs de segunda ordem:

$$D \frac{d^2 c_a}{dx^2} - U \frac{dc_a}{dx} - k_1 c_a = 0$$

$$D \frac{d^2 c_b}{dx^2} - U \frac{dc_b}{dx} + k_1 c_a - k_2 c_b = 0$$

$$D \frac{d^2 c_c}{dx^2} - U \frac{dc_c}{dx} + k_2 c_b = 0$$

Use a abordagem de diferenças finitas para calcular a concentração de cada reagente como uma função

da distância, dados: $D = 0,1 \text{ m}^2/\text{min}$, $U = 1 \text{ m}/\text{min}$, $k_1 = 3/\text{min}$, $k_2 = 1/\text{min}$, $L = 0,5 \text{ m}$, $c_{a,\text{entrada}} = 10 \text{ mol}/\text{L}$. Use aproximações por diferenças finitas centradas com $\Delta x = 0,05$ para obter suas soluções e considere condições de contorno de Danckwerts, como descrito no Problema 24.12. Também, calcule a soma dos reagentes como uma função da distância. Seus resultados fazem sentido?

24.14 Um biofilme com uma espessura L_f (cm) forma-se na superfície de um sólido (Figura P24.14). Depois de atravessar uma camada de difusão de espessura L (cm), um composto químico A difunde-se no biofilme, onde é sujeito a uma reação de primeira ordem irreversível que o converte em um produto B .

Um balanço de massa em estado estacionário pode ser usado para deduzir as seguintes equações diferenciais ordinárias para o composto A :

$$D \frac{d^2 c_a}{dx^2} = 0 \quad 0 \leq x < L$$

$$D_f \frac{d^2 c_a}{dx^2} - kc_a = 0 \quad L \leq x < L + L_f$$

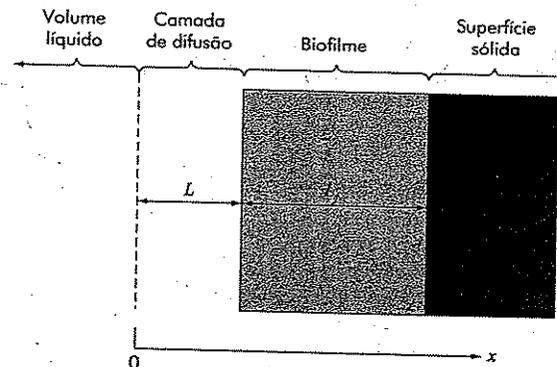


FIGURA P24.14 Biofilme crescendo em uma superfície sólida.

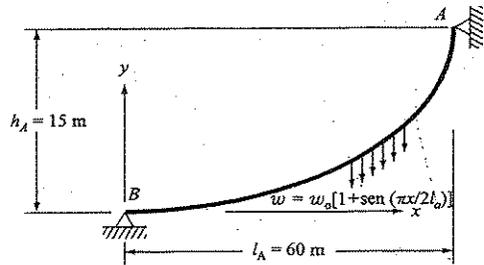


FIGURA P24.15

onde D é o coeficiente de difusão na camada de difusão = $0,8 \text{ cm}^2/\text{d}$, D_f é o coeficiente de difusão no biofilme = $0,64 \text{ cm}^2/\text{d}$ e k é a taxa de primeira ordem para a conversão de A para $B = 0,1/\text{d}$. As seguintes condições de contorno são válidas:

$$c_a = c_{a0} \text{ para } x = 0$$

$$\frac{dc_a}{dx} = 0 \text{ para } x = L + L_f$$

onde c_{a0} é a concentração de A no volume líquido = 100 mol/L . Use o método de diferenças finitas para calcular a distribuição em estado estacionário de A de $x = 0$ a $L + L_f$, onde $L = 0,008 \text{ cm}$ e $L_f = 0,004 \text{ cm}$. Use diferenças finitas centradas com $\Delta x = 0,001 \text{ cm}$.

24.15 Um cabo está pendurado por dois suportes em A e B (Figura P24.15), e está carregado com uma distribuição de carga cujo módulo varia com x como

$$w = w_0 \left[1 + \sin\left(\frac{\pi x}{2l_A}\right) \right]$$

onde $w_0 = 450 \text{ N/m}$. A inclinação do cabo é $(dy/dx) = 0$ em $x = 0$, que é o seu ponto mais baixo. Ele também é o ponto no qual a tensão no cabo está em um mínimo de T_0 . A equação diferencial que governa o cabo é

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w_0}{T_0} \left[1 + \sin\left(\frac{\pi x}{2l_A}\right) \right]$$

Resolva essa equação usando um método numérico e trace a forma do cabo (y em função de x). Para a solução numérica, o valor de T_0 é desconhecido, de modo que a solução deve usar uma técnica iterativa, análoga ao método do tiro, para convergir para um valor correto de h_A para diversos valores de T_0 .

24.16 A equação diferencial básica da curva elástica para uma viga simplesmente apoiada e uniformemente carregada (Figura P24.16) é dada por

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{wLx}{2} - \frac{wx^2}{2}$$

onde E é o módulo de elasticidade e I é o momento de inércia. As condições de contorno são $y(0) = y(L) = 0$. Determine a deflexão da viga usando (a) a abordagem por diferenças finitas ($\Delta x = 0,6 \text{ m}$) e (b) o método do tiro. Os seguintes valores dos parâmetros se aplicam: $E = 200 \text{ GPa}$, $I = 30.000 \text{ cm}^4$, $w = 15 \text{ kN/m}$ e $L = 3 \text{ m}$. Compare seus resultados numéricos com a solução analítica:

$$y = \frac{wLx^3}{12EI} - \frac{wx^4}{24EI} - \frac{wL^3x}{24EI}$$

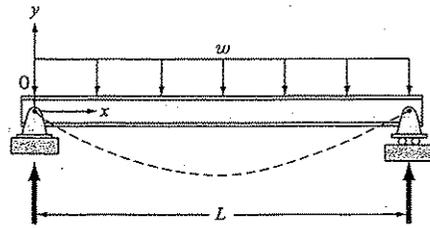


FIGURA P24.16

24.17 No Problema 24.16, a equação diferencial básica da curva elástica para uma viga uniformemente carregada foi formulada como

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{wLx}{2} - \frac{wx^2}{2}$$

Observe que o lado direito representa o momento como uma função de x . Uma abordagem equivalente pode ser formulada em termos da quarta derivada da deflexão como

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} = -w$$

Para essa formulação, são necessárias quatro condições de contorno. Para os suportes mostrados na Figura P24.16, as condições são que os deslocamentos das extremidades são nulos, $y(0) = y(L) = 0$, e que os momentos nas extremidades são nulos, $y''(0) = y''(L) = 0$. Determine a deflexão da viga usando a abordagem por diferenças finitas ($\Delta x = 0,6 \text{ m}$). Os seguintes valores dos parâmetros se aplicam: $E = 200 \text{ GPa}$, $I = 30.000 \text{ cm}^4$, $w = 15 \text{ kN/m}$ e $L = 3 \text{ m}$. Compare seus resultados numéricos com a solução analítica dada no Problema 24.16.

24.18 Sob uma série de hipóteses simplificadoras, a altura do lençol freático em um aquífero não confinado unidimensional (Figura P24.18) pode ser modelada com a seguinte EDO de segunda ordem:

$$Kh \frac{d^2h}{dx^2} + N = 0$$

onde x é a distância (m), K é a condutividade hidráulica (m/d), h é a altura do lençol freático (m), \bar{h} é a altura média do lençol freático (m) e N é a taxa de infiltração (m/d).

Determine a altura do lençol freático para $x = 0$ a 1000 m , onde $h(0) = 10 \text{ m}$ e $h(1000) = 5 \text{ m}$. Use os seguintes parâmetros para o cálculo: $K = 1 \text{ m/d}$ e

$N = 0,0001 \text{ m/d}$. Defina a altura média do lençol freático como a média das condições de contorno. Obtenha sua solução com (a) o método do tiro e (b) o método de diferenças finitas ($\Delta x = 100 \text{ m}$).

24.19 No Problema 24.18, um modelo de águas subterrâneas linearizado foi usado para simular a altura do lençol freático para um aquífero não confinado. Um resultado mais realista pode ser obtido por meio da seguinte EDO não linear:

$$\frac{d}{dx} \left(Kh \frac{dh}{dx} \right) + N = 0$$

onde x é a distância (m), K é a condutividade hidráulica (m/d), h é a altura do lençol freático (m) e N é a taxa de infiltração (m/d). Calcule a altura do lençol freático para o mesmo caso como no Problema 24.18. Isto é, resolva de $x = 0$ a 1000 m com $h(0) = 10 \text{ m}$, $h(1000) = 5 \text{ m}$, $K = 1 \text{ m/d}$ e $N = 0,0001 \text{ m/d}$. Obtenha sua solução com (a) o método do tiro e (b) o método de diferenças finitas ($\Delta x = 100 \text{ m}$).

24.20 Assim como a lei de Fourier e o balanço de calor podem ser empregados para caracterizar distribuições de temperaturas, relações análogas estão disponíveis para modelar problemas de campo em outras áreas da engenharia. Por exemplo, a engenharia elétrica usa uma abordagem similar na modelagem de campos eletrostáticos. Sob uma série de hipóteses simplificadoras, um análogo da lei de Fourier pode ser representado na forma unidimensional como

$$D = -\epsilon \frac{dV}{dx}$$

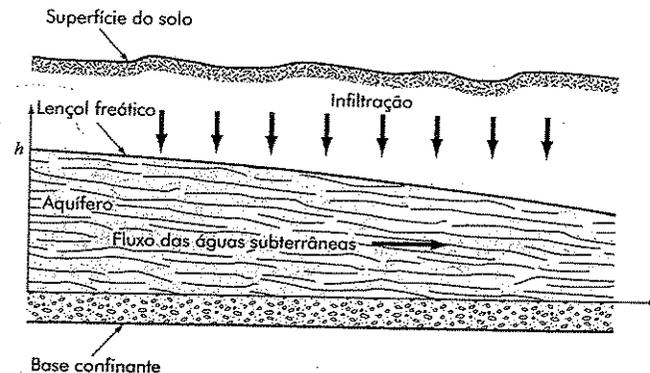


FIGURA P24.18 Aquífero não confinado ou "freático".

onde D é chamado de densidade de fluxo elétrico, ϵ é a permissividade do material e V é o potencial eletrostático. De modo similar, a equação de Poisson (ver Problema 24.8) para campos eletrostáticos pode ser representada em uma dimensão como

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$$

onde ρ_v é a densidade de cargas. Use a técnica de diferenças finitas, com $\Delta x = 2$, para determinar V para um fio em que $V(0) = 1.000$, $V(20) = 0$, $\epsilon = 2$, $L = 20$ e $\rho_v = 30$.

24.21 Considere que a posição de um corpo em queda é governada pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{c}{m} \frac{dx}{dt} - g = 0$$

onde c é um coeficiente de arraste de primeira ordem = 12,5 kg/s, m é a massa = 70 kg e g é a aceleração da gravidade = 9,81 m/s². Use o método do tiro para resolver essa equação para as condições de contorno:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ x(12) &= 500 \end{aligned}$$

24.22 Como na Figura P24.22, uma haste metálica isolada tem uma condição de contorno de temperatura fixa (T_0) em sua extremidade esquerda. Em sua extremidade direita, ela está conectada a um tubo de paredes finas cheio de água através do qual calor é conduzido. O tudo é isolado em sua extremidade direita e troca calor por convecção

com o ar circundante de temperatura fixa T_∞ . O fluxo de calor convectivo em um ponto x ao longo do tubo (W/m^2) é representado por

$$J_{\text{conv}} = h(T_\infty - T_2(x))$$

onde h é o coeficiente de transferência de calor por convecção [$W/(m^2 \cdot K)$]. Use o método de diferenças finitas, com $\Delta x = 0,1$, para calcular a distribuição de temperaturas para o caso em que tanto a haste quanto o tubo são cilíndricos com o mesmo raio r (m). Use os seguintes parâmetros para sua análise: $L_{\text{haste}} = 0,6$ m, $L_{\text{tubo}} = 0,8$ m, $T_0 = 400$ K, $T_\infty = 300$ K, $r = 3$ cm, $\rho_1 = 7870$ kg/m³, $C_{p1} = 447$ J/(kg · K), $k_1 = 80,2$ W/(m · K), $\rho_2 = 1000$ kg/m³, $C_{p2} = 4,18$ kJ/(kg · K), $k_2 = 0,615$ W/(m · K) e $h = 3000$ W/(m² · K). Os subscritos indicam a haste (1) e o tubo (2).

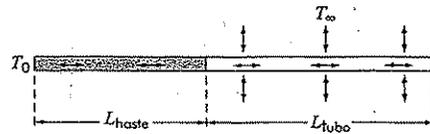


FIGURA P24.22

24.23 Faça os mesmos cálculos como no Problema 24.22, mas para o caso em que o tubo também está isolado (isto é, não há convecção) e a parede do lado direito é mantida em uma temperatura fixa de 200 K.