

Teorema 5 Teorema de Stokes

A circulação de um campo vetorial $F = Mi + Nj + Pk$ ao longo da borda C de uma superfície orientada S , no sentido anti-horário em relação ao vetor unitário normal n da superfície, é igual à integral de $\nabla \times F \cdot n$ sobre S .

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_S \nabla \times F \cdot n \, d\sigma \quad (4)$$

Circulação
anti-horária

Integral do
rotacional

Observe, pela Equação (4), que se duas superfícies orientadas diferentes S_1 e S_2 têm a mesma borda C ; as integrais de seu rotacional são iguais:

$$\iint_{S_1} \nabla \times F \cdot n_1 \, d\sigma = \iint_{S_2} \nabla \times F \cdot n_2 \, d\sigma$$

Ambas as integrais do rotacional são iguais à integral de circulação anti-horária à esquerda da Equação (4) desde que os versores normais n_1 e n_2 orientem as superfícies corretamente.

Naturalmente, precisamos de algumas restrições matemáticas sobre F , C e S para garantir a existência das integrais na equação de Stokes. As restrições usuais são que todas as funções, campos vetoriais e suas derivadas sejam contínuas.

Se C for uma curva no plano xy , orientada no sentido anti-horário, e R for a região no plano limitada por C , então $d\sigma = dx \, dy$ e

$$(\nabla \times F) \cdot n = (\nabla \times F) \cdot k = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$$

Sob essas condições, a equação de Stokes se torna

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx \, dy$$

que é a equação na forma circulação-rotacional do teorema de Green. Reciprocamente, invertendo esses passos podemos escrever a forma circulação-rotacional do teorema de Green para campos bidimensionais na rotação "nabla" como

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_R \nabla \times F \cdot k \, dA \quad (5)$$

Veja a Figura 16.61.

EXEMPLO 2 Verificando a equação de Stokes para um hemisfério

Resolva a Equação (4) para o hemisfério $S: x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \geq 0$, sua circunferência de borda $C: x^2 + y^2 = 9, z = 0$, e o campo $F = yi - xj$.

SOLUÇÃO Calculamos a circulação no sentido anti-horário ao redor de C (quando visto de cima) usando a parametrização $r(\theta) = (3 \cos \theta)i + (3 \sin \theta)j, 0 \leq \theta \leq 2\pi$:

$$dr = (-3 \sin \theta \, d\theta)i + (3 \cos \theta \, d\theta)j$$

$$F = yi - xj = (3 \sin \theta)i - (3 \cos \theta)j$$

$$F \cdot dr = -9 \sin^2 \theta \, d\theta - 9 \cos^2 \theta \, d\theta = -9 \, d\theta$$

$$\oint_C F \cdot dr = \int_0^{2\pi} -9 \, d\theta = -18\pi$$

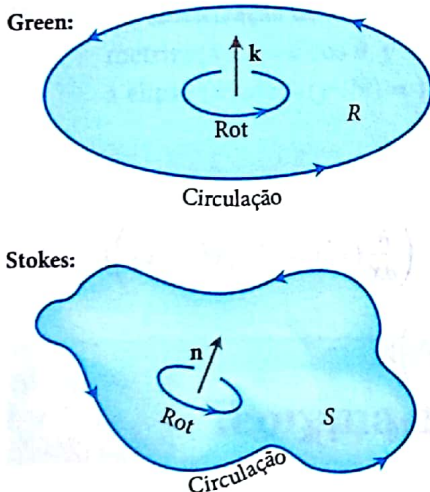


FIGURA 16.61 Teorema de Green contra teorema de Stokes.

Exercícios 16.7

Usando o teorema de Stokes para calcular a circulação

Nos exercícios 1–6, use a integral de superfície no teorema de Stokes para calcular a circulação do campo F ao redor da curva C no sentido indicado.

1. $F = x^2\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

C : A elipse $4x^2 + y^2 = 4$ no plano xy , no sentido anti-horário quando vista de cima.

2. $F = 2y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$

C : O círculo $x^2 + y^2 = 9$ no plano xy , no sentido anti-horário quando vista de cima.

3. $F = y\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$

C : A fronteira do triângulo cortado a partir do plano $x + y + z = 1$ pelo primeiro octante, no sentido anti-horário quando vista de cima.

4. $F = (y^2 + z^2)\mathbf{i} + (x^2 + z^2)\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$

C : A fronteira do triângulo cortado a partir do plano $x + y + z = 1$ pelo primeiro octante, no sentido anti-horário quando vista de cima.

5. $F = (y^2 + z^2)\mathbf{i} + (x^2 + z^2)\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$

C : O quadrado limitado pelas retas $x = \pm 1$ e $y = \pm 1$ no plano xy , no sentido anti-horário quando vista de cima.

6. $F = x^2y^3\mathbf{i} + \mathbf{j} + z\mathbf{k}$

C : A interseção entre o cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \geq 0$, no sentido anti-horário quando vista de cima.

do campo sobre a região limitada pela superfície. Nesta seção, provaremos o teorema da divergência e mostraremos como ele simplifica o cálculo de fluxo. Também deduziremos a lei de Gauss para fluxo em um campo elétrico e a equação de continuidade da hidrodinâmica. Por fim, unificaremos os teoremas de integrais vetoriais do capítulo em um único teorema fundamental.

Divergente em três dimensões

O **divergente** de um campo vetorial $\mathbf{F} = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$ é a função escalar

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \quad (1)$$

O símbolo “ $\operatorname{div} \mathbf{F}$ ” é lido como “divergente de \mathbf{F} ” ou “ $\operatorname{div} \mathbf{F}$ ”. A notação $\nabla \cdot \mathbf{F}$ é lida como “nabla escalar \mathbf{F} ”.

$\operatorname{Div} \mathbf{F}$ tem em três dimensões a mesma interpretação física que tem em duas. Se \mathbf{F} é o campo de velocidade de um escoamento fluido, o valor de $\operatorname{div} \mathbf{F}$ em um ponto (x, y, z) é a taxa à qual o fluido está sendo injetado ou drenado em (x, y, z) . O divergente é o fluxo por unidade de volume ou densidade de fluxo no ponto.

EXEMPLO 1 Encontrando o divergente

Encontre o divergente de $\mathbf{F} = 2xz\mathbf{i} + xy\mathbf{j} - z\mathbf{k}$.

SOLUÇÃO O divergente de \mathbf{F} é

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(2xz) + \frac{\partial}{\partial y}(-xy) + \frac{\partial}{\partial z}(-z) = 2z - x - 1$$

Teorema da divergência

O teorema da divergência diz que, sob condições favoráveis, o fluxo de um campo vetorial para fora através de uma superfície fechada (orientada para fora) é igual à integral tripla do divergente do campo sobre a região limitada pela superfície.

Teorema 7 Teorema da divergência

O fluxo de um campo vetorial \mathbf{F} através de uma superfície S fechada e orientada, no sentido do campo \mathbf{n} de versores normais exteriores da superfície, é igual à integral de $\nabla \cdot \mathbf{F}$ sobre a região D limitada pela superfície:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV \quad (2)$$

Fluxo exterior

Integral do divergente

EXEMPLO 2 Fundamentando o teorema da divergência

Calcule ambos os lados da Equação (2) para o campo $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ sobre a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

SOLUÇÃO A normal exterior unitária a S , calculada a partir do gradiente de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$, é

$$\mathbf{n} = \frac{2(xi + yj + zk)}{\sqrt{4(x^2 + y^2 + z^2)}} = \frac{xi + yj + zk}{a}$$

Assim,

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a} \, d\sigma = \frac{a^2}{a} \, d\sigma = a \, d\sigma$$

porque $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ sobre a superfície. Portanto,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iint_S a \, d\sigma = a \iint_S d\sigma = a(4\pi a^2) = 4\pi a^3$$

O divergente de \mathbf{F} é

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 3$$

assim,

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = \iiint_D 3 \, dV = 3 \left(\frac{4}{3} \pi a^3 \right) = 4\pi a^3$$

EXEMPLO 3 Encontrando o fluxo

Encontre o fluxo de $\mathbf{F} = xyi + yzj + xzk$ para fora através da superfície do cubo cortado do primeiro octante pelos planos $x = 1, y = 1, z = 1$.

SOLUÇÃO Em vez de calcularmos o fluxo como uma soma de seis integrais separadas, uma para cada face do cubo, podemos calculá-lo pela integração do divergente

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(yz) + \frac{\partial}{\partial z}(xz) = y + z + x$$

sobre o interior do cubo:

$$\text{Fluxo} = \iint_{\text{Superfície do cubo}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iiint_{\text{Interior do cubo}} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV$$

Teorema da divergência

$$= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x + y + z) \, dx \, dy \, dz = \frac{3}{2}$$

Integração de rotina

Teorema de Green e sua generalização para três dimensões

Forma normal do teorema de Green:
$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_R \nabla \cdot \mathbf{F} \, dA$$

Teorema da divergência:
$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV$$

Forma tangencial do teorema de Green:
$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} \, dA$$

Teorema de Stokes:
$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$$

Exercícios 16.8

Calculando o divergente

Nos exercícios 1–4, encontre a divergência do campo.

1. O campo de rotação da Figura 16.14.
2. O campo radial da Figura 16.13.
3. O campo gravitacional da Figura 16.9.
4. O campo de velocidade da Figura 16.12.

Usando o teorema da divergência para calcular o fluxo exterior

Nos exercícios 5–16, use o teorema da divergência para encontrar o fluxo exterior de F através da fronteira da região D .

5. **Cubo** $F = (y - x)\mathbf{i} + (z - y)\mathbf{j} + (y - x)\mathbf{k}$

D : O cubo limitado pelos planos $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ e $z = \pm 1$.

6. $F = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

(a) **Cubo** D : O cubo cortado do primeiro octante pelos planos $x = 1$, $y = 1$ e $z = 1$.

(b) **Cubo** D : O cubo limitado pelos planos $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ e $z = \pm 1$.

(c) **Lata cilíndrica** D : A região cortada do cilindro sólido $x^2 + y^2 \leq 4$ pelos planos $z = 0$ e $z = 1$.

7. **Cilindro e parabolóide** $F = y\mathbf{i} + xy\mathbf{j} - z\mathbf{k}$

D : A região dentro do cilindro sólido $x^2 + y^2 \leq 4$ entre o plano $z = 0$ e o parabolóide $z = x^2 + y^2$.

8. **Esfera** $F = x^2\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$

D : A esfera sólida $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$

9. **Parte da esfera** $F = x^2\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j} + 3xz\mathbf{k}$

D : A região cortada do primeiro octante pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

10. **Lata cilíndrica** $F = (6x^2 + 2xy)\mathbf{i} + (2y + x^2z)\mathbf{j} + 4x^2y^2\mathbf{k}$

D : A região cortada do primeiro octante pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e o plano $z = 3$.

11. **Cunha** $F = 2xz\mathbf{i} - xy\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$

D : A cunha cortada do primeiro octante pelo plano $y + z = 4$ e pelo cilindro elíptico $4x^2 + y^2 = 16$.

12. **Esfera** $F = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$

D : A esfera sólida $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$.

13. **Esfera espessa** $F = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}(\mathbf{x}\mathbf{i} + \mathbf{y}\mathbf{j} + \mathbf{z}\mathbf{k})$

D : A região $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$.

14. **Esfera espessa** $F = (\mathbf{x}\mathbf{i} + \mathbf{y}\mathbf{j} + \mathbf{z}\mathbf{k})/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

D : A região $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.

15. **Esfera espessa** $F = (5x^3 + 12xy^2)\mathbf{i} + (y^3 + e^y \sin z)\mathbf{j} + (5z^3 + e^y \cos z)\mathbf{k}$

D : A região do sólido entre as esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

16. **Cilindro espesso** $F = \ln(x^2 + y^2)\mathbf{i} - \left(\frac{2z}{x} \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x}\right)\mathbf{j} + z\sqrt{x^2 + y^2}\mathbf{k}$

D : O cilindro de paredes espessas $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$, $-1 \leq z \leq 2$