

16.5 Áreas e integrais de superfície

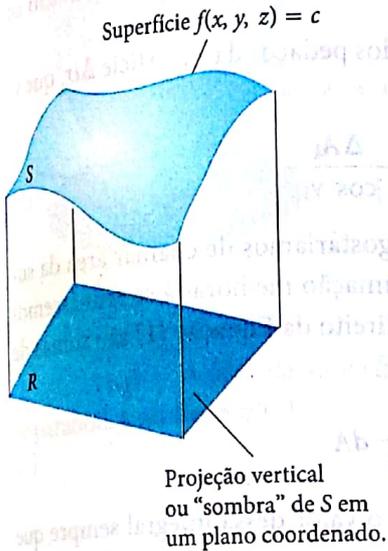


FIGURA 16.38 Como veremos a seguir, a integral de uma função $g(x, y, z)$ sobre uma superfície S no espaço pode ser obtida calculando-se uma integral dupla sobre a projeção vertical ou "sombra" de S sobre um plano coordenado.

Sabemos como integrar uma função sobre uma região em um plano, mas o que fazer se uma função for definida sobre uma superfície curva? Para calcular uma dessas chamadas integrais de superfície, nós a reescrevemos como uma integral dupla sobre uma região de um plano coordenado sob a superfície (Figura 16.38). As integrais de superfície são utilizadas no cálculo de quantidades como a do fluxo de um líquido em uma membrana ou a força ascensional que age sobre um pára-quedas em queda.

Área de superfícies

A Figura 16.39 mostra uma superfície S sobre sua região projetada R em um plano abaixo dela. A superfície é definida pela equação $f(x, y, z) = c$. Se a superfície for **lisa** (∇f é contínuo e nunca se anula sobre S), podemos definir e calcular sua área como uma integral dupla sobre R . Consideramos que a superfície possui somente uma projeção em sua sombra R , ou seja, cada ponto em R corresponde a exatamente um ponto (x, y, z) e, portanto, satisfaz a premissa $f(x, y, z) = c$.

A primeira etapa para definir a área de S é dividir a região R em pequenos retângulos ΔA_k do tipo que usaríamos se estivéssemos definindo uma integral sobre R . Diretamente acima de cada ΔA_k está um pedaço da superfície $\Delta \sigma_k$ que podemos aproximar por um paralelogramo ΔP_k no plano tangente a S em um ponto $T_k(x_k, y_k, z_k)$ em $\Delta \sigma_k$. Esse paralelogramo no plano tangente projeta diretamente para ΔA_k . Para sermos mais específicos, escolhemos um ponto $T_k(x_k, y_k, z_k)$ diretamente acima do vértice de trás C_k de ΔA_k , como mostrado na Figura 16.39. Se o plano tangente for paralelo a R , então ΔP_k será congruente a ΔA_k . Caso contrário, será um paralelogramo cuja área é um pouco maior que a área de ΔA_k .

A Figura 16.40 fornece uma vista ampliada de $\Delta \sigma_k$ e ΔP_k , mostrando o vetor gradiente $\nabla f(x_k, y_k, z_k)$ em T_k e um vetor unitário \mathbf{p} que é normal a R . A figura também mostra o ângulo γ_k entre ∇f e \mathbf{p} . Os outros vetores na figura, \mathbf{u}_k e \mathbf{v}_k , estão ao longo das arestas do pedaço ΔP_k no plano tangente. Assim, tanto $\mathbf{u}_k \times \mathbf{v}_k$ como ∇f são normais ao plano tangente.

Agora precisamos saber, a partir da geometria vetorial avançada, que $|(\mathbf{u}_k \times \mathbf{v}_k) \cdot \mathbf{p}|$ é a área da projeção do paralelogramo determinado por \mathbf{u}_k e \mathbf{v}_k em qualquer plano cuja normal seja \mathbf{p} . (A prova é dada no Apêndice A.8.) No nosso caso, isso se traduz na afirmação

$$|(\mathbf{u}_k \times \mathbf{v}_k) \cdot \mathbf{p}| = \Delta A_k$$

Para simplificar a notação na dedução a seguir, passamos a representar a área do retângulo pequeno também com ΔA_k . Analogamente, ΔP_k também passará a denotar a área da porção do plano tangente diretamente acima dessa pequena região.

Agora, $|\mathbf{u}_k \times \mathbf{v}_k|$ é a área ΔP_k (fato normal sobre o produto vetorial), assim essa última equação se torna

$$\frac{|\mathbf{u}_k \times \mathbf{v}_k|}{\Delta P_k} \cdot \frac{|\mathbf{p}|}{1} |\cos(\text{ângulo entre } \mathbf{u}_k \times \mathbf{v}_k \text{ e } \mathbf{p})| = \Delta A_k$$

O mesmo que $|\cos \gamma_k|$, já que tanto ∇f quanto $\mathbf{u}_k \times \mathbf{v}_k$ são normais ao plano tangente.

ou

$$\Delta P_k |\cos \gamma_k| = \Delta A_k$$

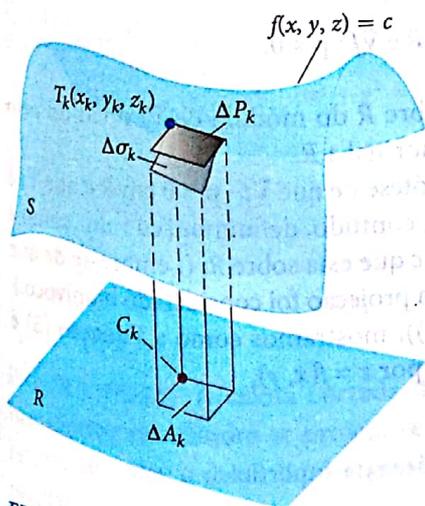


FIGURA 16.39 Uma superfície S e sua projeção vertical sobre um plano abaixo dela. Você pode pensar em R como a sombra de S sobre o plano. A placa tangente ΔP_k aproxima-se do pedaço da superfície $\Delta \sigma_k$ acima de ΔA_k .

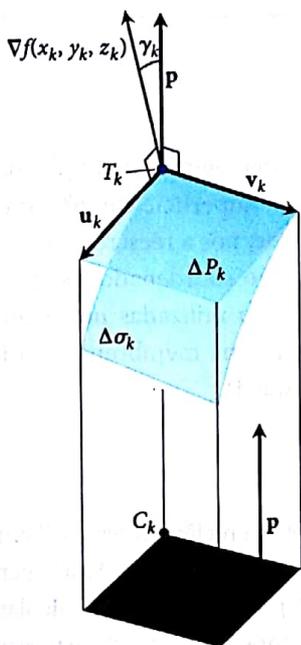


FIGURA 16.40 Visão ampliada da figura anterior. O vetor $\mathbf{u}_k \times \mathbf{v}_k$ (não mostrado) é paralelo ao vetor ∇f porque ambos os vetores são normais ao plano de ΔP_k .

ou

$$\Delta P_k = \frac{\Delta A_k}{|\cos \gamma_k|}$$

desde que $\cos \gamma_k \neq 0$. Teremos $\cos \gamma_k \neq 0$ desde que ∇f não seja paralelo ao plano da base e $\nabla f \cdot \mathbf{p} \neq 0$.

Como os pedaços ΔP_k aproximam-se dos pedaços da superfície $\Delta \sigma_k$ que se encaixam para formar S , a soma

$$\sum \Delta P_k = \sum \frac{\Delta A_k}{|\cos \gamma_k|} \tag{1}$$

se parece com uma aproximação do que gostaríamos de chamar área da superfície de S . Parece também que a aproximação melhoraria se refinássemos a divisão de R . De fato, as somas do lado direito da Equação (1) são somas de aproximação para a integral dupla

$$\iint_R \frac{1}{|\cos \gamma|} dA \tag{2}$$

Portanto, definimos a **área** de S como o valor dessa integral sempre que ela existir. Para qualquer superfície $f(x, y, z) = c$, temos $|\nabla f \cdot \mathbf{p}| = |\nabla f| |\mathbf{p}| |\cos \gamma|$,

portanto

$$\frac{1}{|\cos \gamma|} = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|}$$

Isso se combina com a Equação (2) para originar uma fórmula prática para a área.

Fórmula para área da superfície

A área da superfície $f(x, y, z) = c$ sobre uma região plana fechada e limitada R é

$$\text{Área da superfície} = \iint_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|} dA \tag{3}$$

onde \mathbf{p} é um vetor unitário normal a R e $\nabla f \cdot \mathbf{p} \neq 0$.

Assim, a área é a integral dupla sobre R do módulo de ∇f dividido pelo módulo da componente escalar de ∇f normal a R .

Chegamos à Equação (3) sob a hipótese de que $\nabla f \cdot \mathbf{p} \neq 0$ em R e que ∇f é contínua. Sempre que a integral existir, contudo, definimos seu valor como a área da porção da superfície $f(x, y, z) = c$ que está sobre R . (Lembre-se de que o relacionamento entre a superfície e sua projeção foi considerado biunívoco.)

Nos exercícios (veja a Equação (11)), mostramos como a Equação (3) é simplificada se a superfície for definida por $z = f(x, y)$.

EXEMPLO 1 Encontrando a área da superfície

Encontre a área da superfície cortada do fundo do parabolóide $x^2 + y^2 - z = 0$ pelo plano $z = 4$.

SOLUÇÃO Esboçamos a superfície S e a região R abaixo dela no plano xy (Figura 16.41). A superfície S é parte da superfície de nível $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0$, e R é o disco $x^2 + y^2 \leq 4$ no plano xy . Para obter um vetor unitário normal ao plano de R , podemos tomar $\mathbf{p} = \mathbf{k}$.

Continuamos o trabalho da Equação (4) com esta substituição:

$$\begin{aligned} \text{Área da superfície} &= \sqrt{2} \iint_R \frac{dA}{z} = \sqrt{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dA}{\sqrt{2-x^2-y^2}} \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r \, dr \, d\theta}{\sqrt{2-r^2}} \quad \text{Coordenadas polares} \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left[-(2-r^2)^{1/2} \right]_{r=0}^{r=1} d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (\sqrt{2}-1) d\theta = 2\pi(2-\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Integrais de superfície

Agora, mostraremos como integrar uma função sobre uma superfície usando as idéias que acabamos de desenvolver para calcular a área da superfície.

Suponha, por exemplo, que tenhamos uma carga elétrica distribuída sobre uma superfície $f(x, y, z) = c$ como aquela mostrada na Figura 16.43 e que a função $g(x, y, z)$ dê a carga por unidade de área (densidade de carga) em cada ponto sobre S . Então, podemos calcular a carga total sobre S como uma integral da seguinte maneira:

Dividimos a região projetada R sobre o plano da base sob a superfície em pequenos retângulos do tipo que usaríamos se estivéssemos definindo a área da superfície de S . Então, diretamente acima de cada ΔA_k está um pedaço da superfície $\Delta \sigma_k$ que aproximamos com um pedaço do plano tangente em forma de paralelogramo, ΔP_k . (Veja a Figura 16.43.)

Até este ponto, a construção prossegue como na definição da área da superfície, mas agora acrescentamos uma etapa: calculamos g em (x_k, y_k, z_k) e aproximamos a carga total sobre o pedaço da superfície $\Delta \sigma_k$ pelo produto $g(x_k, y_k, z_k) \Delta P_k$. A razão disso é que quando a partição de R for suficientemente fina, o valor de g em $\Delta \sigma_k$ será aproximadamente constante e ΔP_k será aproximadamente o mesmo que $\Delta \sigma_k$. A carga total sobre S será então aproximada pela soma

$$\text{Carga total} \approx \sum g(x_k, y_k, z_k) \Delta P_k = \sum g(x_k, y_k, z_k) \frac{\Delta A_k}{|\cos \gamma_k|}$$

Se f , a função que define a superfície S , e suas derivadas parciais de primeira ordem forem contínuas e se g for contínua sobre S , então as somas do lado direito da última equação aproximam o limite

$$\iint_R g(x, y, z) \frac{dA}{|\cos \gamma|} = \iint_R g(x, y, z) \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|} dA \quad (5)$$

à medida que a divisão de R for refinada da maneira habitual. Esse limite é chamado integral de g sobre a superfície S e é calculada como uma integral dupla sobre R . O valor da integral é a carga total sobre a superfície S .

Como seria de esperar, a fórmula na Equação (5) define a integral de qualquer função g sobre a superfície S , desde que a integral exista.

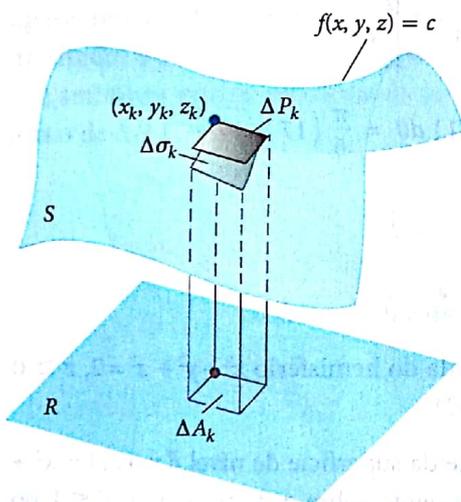


FIGURA 16.43 Se soubermos como uma carga elétrica $g(x, y, z)$ é distribuída sobre uma superfície, poderemos encontrar a carga total com uma integral de superfície modificada.

Definição Integral de superfície

Se R for a região da projeção de uma superfície S definida pela equação $f(x, y, z) = c$ e g for uma função contínua definida nos pontos de S , então a integral de g sobre S é a integral

$$\iint_R g(x, y, z) \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|} dA \quad (6)$$

onde \mathbf{p} é um vetor unitário normal a R e $\nabla f \cdot \mathbf{p} \neq 0$. A integral é chamada integral de superfície.

A integral da Equação (6) tem significados diferentes em aplicações diferentes. Se g tiver valor constante 1, a integral dá a área de S . Se g for a densidade de massa de uma casca fina de material modelada por S , a integral dá a massa da casca.

Podemos abreviar a integral da Equação (6) escrevendo $d\sigma$ para $(|\nabla f|/|\nabla f \cdot \mathbf{p}|)dA$.

O elemento de área e a forma diferencial para integrais de superfície

$$d\sigma = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|} dA \quad \iint_S g d\sigma \quad (7)$$

Elemento de área da superfície

Fórmula diferencial para integrais da área da superfície

Integrais de superfície comportam-se como outras integrais duplas, a integral da soma de duas funções é a soma de suas integrais e assim por diante. A propriedade de aditividade do domínio assume a forma

$$\iint_S g d\sigma = \iint_{S_1} g d\sigma + \iint_{S_2} g d\sigma + \cdots + \iint_{S_n} g d\sigma$$

A idéia é que, se S é dividida por curvas lisas em um número finito de pedaços lisos não sobrepostos (isto é, se S for **lisa por partes**), então a integral sobre S é a soma das integrais sobre os pedaços. Assim, a integral de uma função sobre a superfície de um cubo é a soma das integrais sobre as faces do cubo. Podemos integrar sobre um casco de tartaruga de placas soldadas integrando uma placa de cada vez e somando os resultados.

EXEMPLO 3 Integrando sobre uma superfície

Integre $g(x, y, z) = xyz$ sobre a superfície do cubo cortado do primeiro octante pelos planos $x = 1$, $y = 1$ e $z = 1$ (Figura 16.44).

SOLUÇÃO Integramos xyz sobre cada um dos seis lados e somamos o resultado. Como $xyz = 0$ sobre os lados nos planos coordenados, a integral sobre a superfície do cubo se reduz a

$$\iint_{\text{Superfície do cubo}} xyz d\sigma = \iint_{\text{Lado A}} xyz d\sigma + \iint_{\text{Lado B}} xyz d\sigma + \iint_{\text{Lado C}} xyz d\sigma$$

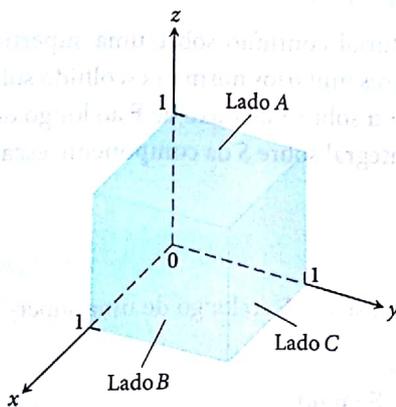


FIGURA 16.44 O cubo do Exemplo 3.

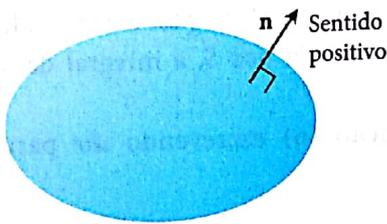


FIGURA 16.45 Superfícies fechadas lisas no espaço são orientáveis. O vetor unitário normal exterior define o sentido positivo em cada ponto.

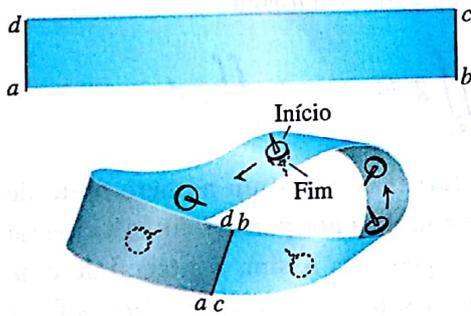


FIGURA 16.46 Para fazer uma faixa de Möbius, pegue uma tira retangular de papel $abcd$, torça uma vez a extremidade bc e cole as extremidades, fazendo coincidir a com c e b com d . A faixa de Möbius é uma superfície não orientável.

O lado A é a superfície $f(x, y, z) = z = 1$ sobre a região quadrada R_{xy} : $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, no plano xy . Para essa superfície e região,

$$\mathbf{p} = \mathbf{k}, \quad \nabla f = \mathbf{k}, \quad |\nabla f| = 1, \quad |\nabla f \cdot \mathbf{p}| = |\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}| = 1$$

$$d\sigma = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|} dA = \frac{1}{1} dx dy = dx dy$$

$$xyz = xy(1) = xy$$

e

$$\iint_{\text{Lado A}} xyz d\sigma = \iint_{R_{xy}} xy dx dy = \int_0^1 \int_0^1 xy dx dy = \int_0^1 \frac{y}{2} dy = \frac{1}{4}$$

A simetria nos diz que as integrais de xyz sobre os lados B e C são também $1/4$. Assim,

$$\iint_{\text{Superfície do cubo}} xyz d\sigma = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Orientação

Chamamos uma superfície lisa S de **orientável** se for possível definir um campo \mathbf{n} de vetores unitários normais sobre S que variam continuamente com a posição. Qualquer pedaço ou subporção de uma superfície orientável é orientável. Esferas e outras superfícies fechadas lisas no espaço (superfícies lisas que englobam sólidos) são orientáveis. Convencionamos que \mathbf{n} sobre uma superfície fechada aponta para fora.

Uma vez escolhido \mathbf{n} , dizemos que **orientamos** a superfície, e chamamos esta, juntamente com seu campo normal, de **superfície orientada**. O vetor \mathbf{n} em qualquer ponto é denominado **sentido positivo** nesse ponto (Figura 16.45).

A faixa de Möbius mostrada na Figura 16.46 não é orientável. Não importa onde você comece a construir um campo normal unitário contínuo (mostrado como a haste de uma tacha na figura), mover o vetor continuamente ao redor da superfície da maneira mostrada vai levá-lo ao ponto de partida com o sentido oposto daquele que ele tinha quando começou. O vetor nesse ponto não pode apontar para ambos os lados, mas é o que deve acontecer, para que o campo seja contínuo. Concluimos que tal campo não existe.

Integral de superfície para fluxo

Suponha que \mathbf{F} seja um campo vetorial contínuo sobre uma superfície orientada S e que \mathbf{n} seja o campo de vetores unitários normais escolhido sobre a superfície. Chamamos a integral de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ sobre S de **fluxo** de \mathbf{F} ao longo de S na direção positiva. Então, o fluxo é a integral sobre S da componente escalar de \mathbf{F} na direção de \mathbf{n} .

Definição Fluxo

O **fluxo** de um campo vetorial tridimensional \mathbf{F} ao longo de uma superfície orientada S na direção de \mathbf{n} é

$$\text{Fluxo} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma \tag{8}$$

A definição é análoga ao fluxo de um campo bidimensional F ao longo de uma curva plana C . No plano (Seção 16.2) o fluxo é

$$\int_C F \cdot \mathbf{n} \, ds$$

a integral da componente escalar de F normal à curva.

Se F é o campo de velocidades de um escoamento fluido tridimensional, o fluxo de F ao longo de S é a taxa líquida com que o fluido atravessa S no sentido positivo escolhido. Discutiremos esses escoamentos com mais detalhes na Seção 16.7.

Se S é parte de uma superfície de nível $g(x, y, z) = c$, então \mathbf{n} pode ser tomado como um dos dois campos

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\nabla g}{|\nabla g|} \tag{9}$$

dependendo de qual for o sentido preferido. O fluxo correspondente é

$$\text{Fluxo} = \iint_S F \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \tag{8}$$

$$= \iint_R \left(F \cdot \frac{\pm \nabla g}{|\nabla g|} \right) \frac{|\nabla g|}{|\nabla g \cdot \mathbf{p}|} \, dA \quad \text{Equações (9) e (7)}$$

$$= \iint_R F \cdot \frac{\pm \nabla g}{|\nabla g \cdot \mathbf{p}|} \, dA \tag{10}$$

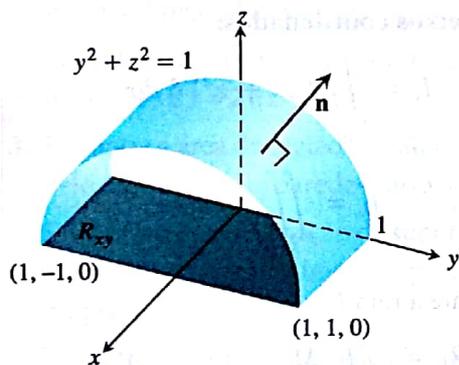


FIGURA 16.47 O Exemplo 4 calcula o fluxo exterior de um campo vetorial através desta superfície. A área da projeção R_{xy} é 2.

EXEMPLO 4 Encontrando o fluxo

Encontre o fluxo exterior de $F = yz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ através da superfície S cortada do cilindro $y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ pelos planos $x = 0$ e $x = 1$.

SOLUÇÃO O campo normal exterior sobre S (Figura 16.47) pode ser calculado a partir do gradiente de $g(x, y, z) = y^2 + z^2$ como

$$\mathbf{n} = + \frac{\nabla g}{|\nabla g|} = \frac{2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}}{\sqrt{4y^2 + 4z^2}} = \frac{2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}}{2\sqrt{1}} = y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Com $\mathbf{p} = \mathbf{k}$, temos também

$$d\sigma = \frac{|\nabla g|}{|\nabla g \cdot \mathbf{k}|} \, dA = \frac{2}{|2z|} \, dA = \frac{1}{z} \, dA$$

Podemos ignorar os símbolos de valor absoluto porque $z \geq 0$ sobre S . O valor de $F \cdot \mathbf{n}$ sobre a superfície é

$$\begin{aligned} F \cdot \mathbf{n} &= (yz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}) \cdot (y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \\ &= y^2z + z^3 = z(y^2 + z^2) \\ &= z \end{aligned} \quad y^2 + z^2 = 1 \text{ sobre } S$$

Portanto, o fluxo exterior de F através de S é

$$\iint_S F \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iint_S (z) \left(\frac{1}{z} \, dA \right) = \iint_{R_{xy}} dA = \text{área}(R_{xy}) = 2$$

Exercícios 16.5

Área da superfície

1. Encontre a área da superfície cortada do parabolóide $x^2 + y^2 - z = 0$ pelo plano $z = 2$.
2. Encontre a área da faixa cortada do parabolóide $x^2 + y^2 - z = 0$ pelos planos $z = 2$ e $z = 6$.
3. Encontre a área da região cortada do plano $x + 2y + 2z = 5$ pelo cilindro cujas paredes são $x = y^2$ e $x = 2 - y^2$.
4. Encontre a área da porção da superfície $x^2 - 2z = 0$ que está acima do triângulo limitado pelas retas $x = \sqrt{3}$, $y = 0$ no plano xy .
5. Encontre a área da superfície $x^2 - 2y - 2z = 0$ que está acima do triângulo limitado pelas retas $x = 2$, $y = 0$ e $y = 3x$ no plano xy .
6. Encontre a área da calota cortada da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
7. Encontre a área da elipse cortada do plano $z = cx$ (c uma constante) pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
8. Encontre a área da porção superior do cilindro $x^2 + z^2 = 1$ que está entre os planos $x = \pm 1/2$ e $y = \pm 1/2$.
9. Encontre a área da porção do parabolóide $x = 4 - y^2 - z^2$ que está acima do anel $1 \leq y^2 + z^2 \leq 4$ no plano yz .
10. Encontre a área da superfície cortada do parabolóide $x^2 + y + z^2 = 2$ pelo plano $y = 0$.
11. Encontre a área da superfície $x^2 - 2 \ln x + \sqrt{15}y - z = 0$ acima do quadrado $R: 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$, no plano xy .
12. Encontre a área da superfície $2x^{3/2} + 2y^{3/2} - 3z = 0$ acima do quadrado $R: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, no plano xy .

Integrais de superfície

13. Integre $g(x, y, z) = x + y + z$ sobre a superfície do cubo cortado do primeiro octante pelos planos $x = a, y = a, z = a$.

14. Integre $g(x, y, z) = y + z$ sobre a superfície da cunha no primeiro octante limitada pelos planos coordenados e os planos $x = 2$ e $y + z = 1$.
15. Integre $g(x, y, z) = xyz$ sobre a superfície do sólido retangular cortado do primeiro octante pelos planos $x = a, y = b$ e $z = c$.
16. Integre $g(x, y, z) = xyz$ sobre a superfície do sólido retangular limitado pelos planos $x = \pm a, y = \pm b$ e $z = \pm c$.
17. Integre $g(x, y, z) = x + y + z$ sobre a porção do plano $2x + 2y + z = 2$ que está no primeiro octante.
18. Integre $g(x, y, z) = x\sqrt{y^2 + 4}$ sobre a superfície obtida cortando-se o cilindro parabólico $y^2 + 4z = 16$ pelos planos $x = 0, x = 1$ e $z = 0$.

Fluxo através de uma superfície

Nos exercícios 19 e 20, encontre o fluxo do campo F através da porção da superfície dada no sentido especificado.

19. $F(x, y, z) = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

S : Superfície retangular $z = 0, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3$, sentido \mathbf{k} .

20. $F(x, y, z) = yx^2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$

S : Superfície retangular $y = 0, -1 \leq x \leq 2, 2 \leq z \leq 7$, sentido $-\mathbf{j}$.

Nos exercícios 21–26, encontre o fluxo do campo F através da porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ no primeiro octante no sentido oposto à origem.

21. $F(x, y, z) = z\mathbf{k}$

22. $F(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

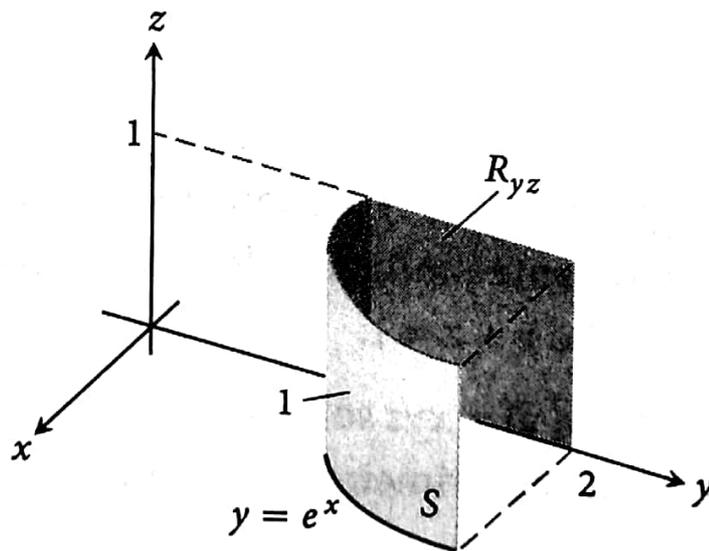
23. $F(x, y, z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + \mathbf{k}$

24. $F(x, y, z) = zx\mathbf{i} + zy\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

25. $F(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

26. $F(x, y, z) = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

27. Encontre o fluxo exterior do campo $F(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + x\mathbf{j} - 3z\mathbf{k}$ através da superfície cortada do cilindro parabólico $z = 4 - y^2$ pelos planos $x = 0$, $x = 1$ e $z = 0$.
28. Encontre o fluxo exterior (para longe do eixo z) do campo $F(x, y, z) = 4x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ através da superfície cortada do fundo do parabolóide $z = x^2 + y^2$ pelo plano $z = 1$.
29. Seja S a porção do cilindro $y = e^x$ no primeiro octante que é projetada paralelamente ao eixo x sobre o retângulo R_{yz} : $1 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 1$ no plano yz (veja a figura a seguir). Seja \mathbf{n} o vetor unitário normal a S que aponta para longe do plano yz . Encontre o fluxo do campo $F(x, y, z) = -2\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ através de S no sentido de \mathbf{n} .



37

30. Seja S a porção do cilindro $y = \ln x$ no primeiro octante cuja projeção paralela ao eixo y sobre o plano xz é o retângulo R_{xz} : $1 \leq x \leq e$, $0 \leq z \leq 1$. Seja \mathbf{n} o vetor unitário normal a S que aponta para fora do plano xz . Encontre o fluxo de $F = 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ através de S no sentido de \mathbf{n} .

38.

31. Encontre o fluxo exterior do campo $F = 2xy\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$ ao longo da superfície do cubo cortado do primeiro octante pelos planos $x = a$, $y = a$, $z = a$.
32. Encontre o fluxo exterior do campo $F = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + \mathbf{k}$ através da superfície da calota superior cortada da esfera sólida $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$ pelo plano $z = 3$.