5. Um elevador tem seu funcionamento bloqueado se sua carga for superior a 450 kg. Sabendo que o peso de um adulto é uma variável aleatória com distribuição normal, sendo a média igual a 70 kg e o desvio igual a 15 kg, calcule a probabilidade de ocorrer o bloqueio numa tentativa de transportar 6 adultos.

Resolução:

X_i: Peso de um adulto X_i: $N(70, 225)$

$$Y\text{: Peso de 6 adultos} \rightarrow \quad Y = \sum_{i=1}^{6} X_i \begin{cases} E(Y) = \sum_{i=1}^{6} E(X_i) = 6 \cdot 70 = 420 \\ \text{VAR}(Y) = \sum_{i=1}^{6} \text{VAR}(X_i) = 6 \cdot 225 = 1.350 \end{cases}$$

$$\therefore Y\text{: } N(420,\ 1.350) \begin{cases} \mu = 420 \\ \sigma = \sqrt{1.350} = 36,74 \end{cases} \qquad Z = \frac{Y - 420}{36,74}$$

$P(\text{Bloqueio}) = P(Y > 450) = P(Z > 0,82) =$

$= 0,5 - P(0 \leq Z \leq 0,82) = 0,5 - 0,293892$

$P(\text{Bloqueio}) = 0,206108$

6. O peso de uma caixa de peças é uma variável aleatória com distribuição normal de probabilidade, com média de 60 kg e desvio padrão de 4 kg. Um carregamento de 200 caixas de peças é feito. Seja X o peso do carregamento e X tendo distribuição normal, determinar:

a) $P(|X - 12.100| \geq 32)$;

b) X_a tal que $P(X \geq X_a) = 0,973$.

Resolução:

X_i: $N(60, 16)$ Peso da Caixa i

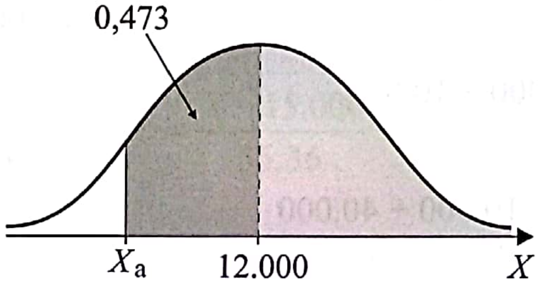
$$X\text{: Peso da carga } X = \sum_{i=1}^{200} X_i$$

$$\left.\begin{array}{l} E(X)=60\cdot 200=12.000 \\ \text{VAR}(X)=200\cdot 16=3.200 \end{array}\right\} X:\ N(12.000,\ 3.200) \qquad \begin{array}{l} \mu=12.000 \\ \sigma=\sqrt{3.200}=56,57 \end{array}$$

$$Z=\frac{X-12.000}{56,57}$$

a) $P(|X-12.100|\leq 32)=P(-32\leq X-12.100\leq 32)=P(12.068\leq X\leq 12.132)=$
$=P(1,20\leq Z\leq 2,33)=P(0\leq Z\leq 2,33)-P(0\leq Z\leq 1,20)=$
$=0,490097-0,384930=$ $\boxed{0,105167}$

b) $P(X\geq X_a)=0,973$



$Z_\alpha=Z_{0,473}=-1,92$

$$-1,92=\frac{X_a-12.000}{56,57}$$

$$\boxed{X_a=11.891,39}$$

7. O custo de um produto A é determinado por custos fixos, mão de obra e matéria-prima. Sabemos que os custos fixos são de R\$ 1.000,00 e o desvio padrão de R\$ 80,00, com distribuição normal, e que o custo da mão de obra segue distribuição normal com média de R\$ 5.000,00 e desvio padrão de R\$ 100,00. O custo da matéria-prima é o dobro do custo da mão de obra e também segue uma distribuição normal. Admitindo-se que custo fixo, matéria-prima e mão de obra sejam independentes e que o custo do produto A tenha uma distribuição normal, determine:

a) qual a média e o desvio do custo de A;
b) qual a probabilidade de A custar mais R\$16.500,00;
c) qual a probabilidade de que o custo de A esteja entre R\$ 15.800,00 e R\$ 16.900,00.

Resolução:

a) Sejam:
X_1: custo fixo
X_2: custo da mão de obra
X_3: custo da matéria-prima
X: custo de A

Como $X_3 = 2X_2$, temos:

$$\begin{cases} E(X_3) = 2E(X_2) \\ \text{VAR}(X_3) = 4\text{VAR}(X_2) \end{cases}$$

Logo:

X_1: $N(1.000, 6.400)$

X_2: $N(5.000, 10.000)$

X_1: $N(10.000, 40.000)$

E como

$X = X_1 + X_2X_3$,

temos:

$E(X) = 1.000 + 5.000 + 10.000$

$E(X) = 16.000$

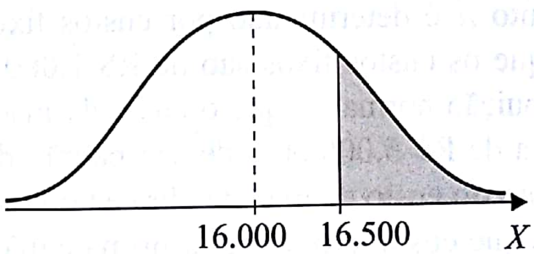
$\text{VAR}(X) = 6.400 + 10.000 + 40.000$

$\text{VAR}(X) = 56.400$

$$X\text{: } N(16.000,\ 56.400) \rightarrow \begin{cases} \mu = 16.000 \\ \sigma = 237{,}49 \end{cases} \rightarrow \boxed{Z = \frac{X - 16.000}{237{,}49}}$$

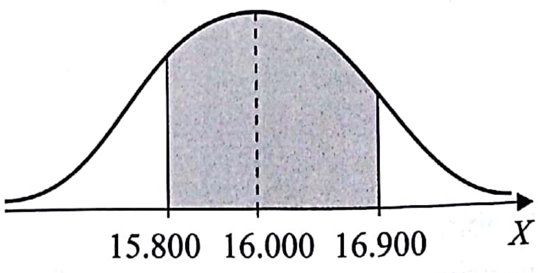
b) $P(X > 16.500) = P(Z \geq 2{,}11) = 0{,}5 - P(0 \leq Z \leq 2{,}11) =$

$= 0{,}5 - 0{,}482571 = \boxed{0{,}017429}$



c) $P(15.800 < X < 16.900) = P(-0{,}84 \leq Z \leq 3{,}79) =$

$= 0{,}299546 + 0{,}499925 = \boxed{0{,}799471}$



8. Um criador possui 5.000 cabeças de vaca leiteira. Sabendo-se que cada vaca produz em média 3 litros por dia, obedecendo a uma distribuição normal, com desvio padrão de 0,5 litro, calcular a probabilidade de produzir, diariamente:
   a) mais de 15.110 litros;
   b) entre 14.910 e 14.960 litros.

Resolução:

X_i: Produção da vaca i X_i: $N(3;\ 0{,}25)$

X: Produção total $\therefore X = \sum_{i=1}^{5.000} X_i$

$$\left.\begin{array}{l} E(X) = n\mu = 5.000 \cdot 3 = 15.000 \\ \mathrm{VAR}(X) = n\sigma^2 = 5.000 \cdot 0{,}25 = 1.250 \end{array}\right\} X:\ N(15.000,\ 1.250)$$

$$\therefore \begin{array}{l} \mu = 15.000 \\ \sigma = \sqrt{1.250} = 35{,}36 \end{array} \rightarrow Z = \frac{X - 15.000}{35{,}36}$$

a) $P(X > 15.110) = P(Z \geq 3{,}11) = 0{,}5 - P(0 \leq Z \leq 3{,}11) =$

$= 0{,}5 - 0{,}499065 = \boxed{0{,}000935}$

b) $P(14.910 \leq X \leq 14.960) = P(-2{,}55 \leq Z \leq -1{,}13) =$

$= P(-2{,}55 \leq Z \leq 0) - P(-1{,}13 \leq Z \leq 0) =$

$= 0{,}494614 - 0{,}370762 = \boxed{0{,}123852}$

Exercícios propostos

1. Sejam X_1: $N(200, 60)$ e X_2: $N(100, 20)$ variáveis independentes. Seja X normalmente distribuída, tal que $X = X_1 - X_2$, calcular:
   a) $P(92 \leq X \leq 106)$;
   b) $P(110 \leq X \leq 117)$;
   c) $P(|X - 100| \leq 14)$.

2. Sejam as variáveis normalmente distribuídas e independentes,

   X_1: $N(100, 20)$

   X_2: $N(100, 30)$

   X_3: $N(160, 40)$

   X_4: $N(200, 40)$

   Seja X também com distribuição normal, sendo que $X = 2X_1 - X_2 + 3X_3 - X_4$. Calcular:
   a) $P(X \geq 420)$;
   b) $P(X \leq 436)$;

c) $P(300 \leq X \leq 480)$.

3. Numa indústria, a montagem de um certo item é feita em duas etapas. Os tempos necessários para cada etapa são independentes e têm as seguintes distribuições:

   X_1: N(75 seg; 16 seg^2), X_1: tempo da 1ª etapa

   X_2: N(125 seg; 100 seg^2), X_2: tempo da 2ª etapa

   Qual a probabilidade de que sejam necessários, para montar a peça:

   a) mais de 210 segundos?

   b) menos de 180 segundos?

4. $X: B\left(100; \dfrac{1}{10}\right)$. Calcular $P(X = 10)$ pela aproximação da normal.

5. $X: B(n; p)$, onde $n = 100$ e $p = \dfrac{1}{2}$. Calcular, usando a aproximação pela normal:

   a) $P(X \geq 25)$;

   b) $P(X \leq 70)$;

   c) $P(X > 57)$;

   d) $P(X = 52)$;

   e) $P(25 < X < 57)$.

6. Numa binomial em que $n = 100$ e $p = 0,6$, calcular a probabilidade de se obter de 70 a 80 sucessos, inclusive os extremos.

7. Um dado é lançado 120 vezes. Determinar a probabilidade de aparecer face 4:

   a) 18 vezes ou menos;

   b) 14 vezes ou menos, admitindo-se que o dado não seja viciado.

8. Uma máquina produz parafusos, dos quais 10% são defeituosos. Usando a aproximação da distribuição binomial pela normal, determinar a probabilidade de uma amostra formada ao acaso de 400 parafusos produzidos pela máquina serem defeituosos:

   a) no máximo 30;

   b) entre 30 e 50 (inclusive os extremos);

   c) mais de 35 e menos de 45;

   d) mais de 55.

9. Determinar a probabilidade de que em 200 lances de uma moeda, resultem:

   a) 80 < caras < 120;

   b) menos de 90 caras;

   c) menos de 85 ou mais de 115 caras;

   d) exatamente 100 caras.

10. Sejam X_1: $N(150, 30)$, X_2: $N(200, 20)$ e X_3: $N(120, 40)$ independentes. Seja $X = 3X_1 - X_2 - X_3$ também normal. Calcular:

a) $P(X \leq X_\alpha) = 0{,}83$;

b) $P(\mu - 1{,}4\sigma \leq X \leq \mu + 2{,}3\sigma)$.

11. Sejam X_1: $N(180, 25)$ e X_2 : $N(95, 36)$ variáveis independentes. Seja $X = 4X_1 - 5X_2$. Calcular:

a) $P(|X - 200| \leq 180)$;

b) $P(|X - 160| \geq 120)$.

12. Sejam X_i: $N(200, 40)$ variáveis normais com distribuições independentes, $i = 1, 2, ..., 100$. Seja $X = \sum_{i=1}^{100} X_i$ também normal. Calcular:

a) $P(X \geq 20.247)$;

b) $P(X - 0{,}96\,\sigma^2 \geq \mu - 4.000)$.

13. A montagem de uma peça é feita em 3 etapas, independentes entre si. Os tempos de montagem de cada etapa são normalmente distribuídos, como segue:

Etapa	Média	Desvio
1ª	3h	30 minutos
2ª	4h	20 minutos
3ª	6h	50 minutos

O tempo total de montagem também é normalmente distribuído. Qual a probabilidade de que a montagem da peça seja feita:

a) em mais de 660 minutos?

b) entre 896 minutos e 915 minutos?

14. Sacos de feijão são completados automaticamente por uma máquina, com peso médio por saco de 60 kg, desvio padrão de 1,5 kg e distribuição normal. No processo de armazenagem e transporte, a perda média por saco é de 1,2 kg e desvio padrão de 0,4 kg, também com distribuição normal. Calcular a probabilidade de que, numa remessa de 140 sacos de feijão, o peso total não ultrapasse 8.230 kg.