

FIGURA 16.24 O retângulo para definir a divergência (densidade de fluxo) de um campo vetorial em um ponto (x, y) .

Divergência

Precisamos de duas idéias novas para o teorema de Green. A primeira é a idéia da divergência de um campo vetorial em um ponto também chamada densidade de fluxo de um campo vetorial, por físicos e engenheiros. Nós o obtemos da maneira indicada a seguir.

Suponha que $F(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ seja o campo de velocidade de um escoamento de fluido no plano e que as derivadas parciais de primeira ordem de M e N sejam contínuas em cada ponto de uma região R . Seja (x, y) um ponto em R e seja A um retângulo pequeno com um vértice em (x, y) que, juntamente com seu interior, está inteiramente contido em R (Figura 16.24). Os lados do retângulo, paralelos aos eixos coordenados, têm comprimentos de Δx e Δy . A taxa à qual o fluido deixa o retângulo através da aresta inferior é aproximadamente

$$F(x, y) \cdot (-\mathbf{j}) \Delta x = -N(x, y) \Delta x.$$

Esta é a componente escalar da velocidade em (x, y) na direção do vetor normal exterior vezes o comprimento do segmento. Se a velocidade estiver em metros por segundo, por exemplo, a taxa de saída será em metros por segundo vezes metros ou metros quadrados por segundo. As taxas às quais o fluido atravessa os outros três lados nas direções de suas normais exteriores podem ser estimadas de maneira análoga. Assim temos

Taxas de saída:	Topo:	$F(x, y + \Delta y) \cdot \mathbf{j} \Delta x = N(x, y + \Delta y) \Delta x$
	Fundo:	$F(x, y) \cdot (-\mathbf{j}) \Delta x = -N(x, y) \Delta x$
	Direita:	$F(x + \Delta x, y) \cdot \mathbf{i} \Delta y = M(x + \Delta x, y) \Delta y$
	Esquerda:	$F(x, y) \cdot (-\mathbf{i}) \Delta y = -M(x, y) \Delta y$

Combinando pares opostos, temos

$$\text{Topo e fundo: } (N(x, y + \Delta y) - N(x, y))\Delta x \approx \left(\frac{\partial N}{\partial y} \Delta y\right)\Delta x$$

$$\text{Direita e esquerda: } (M(x + \Delta x, y) - M(x, y))\Delta y \approx \left(\frac{\partial M}{\partial x} \Delta x\right)\Delta y$$

Somando ambos os lados dessas duas equações, temos

$$\text{Fluxo através de uma fronteira retangular} \approx \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y$$

Agora, dividimos por $\Delta x \Delta y$ para estimar o fluxo total por unidade de área ou a densidade de fluxo para o retângulo:

$$\frac{\text{Fluxo através da fronteira retangular}}{\text{área do retângulo}} \approx \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right)$$

Por fim, fazemos Δx e Δy se aproximarem de zero para definir o que chamamos *densidade de fluxo* de F no ponto (x, y) . Em matemática, chamamos a densidade de fluxo de *divergente* de F . Seu símbolo é $\text{div } F$, pronunciado “divergente de F ” ou “ $\text{div } F$ ”.

Definição Densidade de fluxo ou divergente

A densidade de fluxo ou divergente de um campo vetorial $F = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ no ponto (x, y) é

$$\text{div } F = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \tag{1}$$

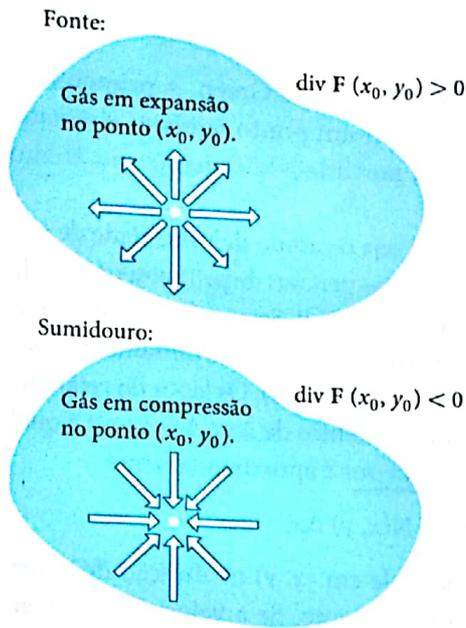


FIGURA 16.25 Se um gás estiver expandindo em um ponto (x_0, y_0) , as linhas de escoamento têm divergência positiva; se o gás estiver comprimindo, a divergência é negativa.

Intuitivamente, se um gás estiver expandindo no ponto (x_0, y_0) , as linhas de escoamento divergirão lá (daí o nome) e, como o ar estaria escoando para fora de um retângulo pequeno em torno de (x_0, y_0) , o divergente de F em (x_0, y_0) seria positivo. Se o gás estivesse sendo comprimido em vez de estar expandindo, o divergente seria negativo. Veja a Figura 16.25.

EXEMPLO 1 Encontrando o divergente

Encontre o divergente de $F(x, y) = (x^2 - y)\mathbf{i} + (xy - y^2)\mathbf{j}$.

SOLUÇÃO Usamos a fórmula na Equação (1):

$$\begin{aligned} \text{div } F &= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y) + \frac{\partial}{\partial y}(xy - y^2) \\ &= 2x + x - 2y = 3x - 2y \end{aligned}$$

Giro em torno de um eixo: a componente k do rotacional

A segunda das duas idéias de que precisamos para o teorema de Green é a idéia de como uma roda de pás gira em um ponto sobre uma região plana na qual um fluido está escoando. Essa situação nos dá uma idéia de como o fluido está circulando ao redor dos eixos localizados em diferentes pontos e perpendiculares à região. Os físicos costumam chamar essa movimentação de *densidade de circulação* de um campo vetorial F em um ponto. Para obtê-la, retornamos ao campo de velocidade

$$F(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

e o retângulo A . O retângulo é redesenhado aqui como a Figura 16.26.

A circulação de F no sentido anti-horário em torno da fronteira de A é a soma das taxas de escoamento ao longo dos lados. Para a aresta inferior, a taxa de escoamento é aproximadamente

$$F(x, y) \cdot \mathbf{i} \Delta x = M(x, y) \Delta x$$

Essa é a componente escalar da velocidade $F(x, y)$ na direção do vetor tangente \mathbf{i} vezes o comprimento do segmento. As taxas de escoamento ao longo dos outros lados no sentido anti-horário são expressas de maneira similar. Em geral, temos

- Topo: $F(x, y + \Delta y) \cdot (-\mathbf{i}) \Delta x = -M(x, y + \Delta y) \Delta x$
- Fundo: $F(x, y) \cdot \mathbf{i} \Delta x = M(x, y) \Delta x$
- Direita: $F(x + \Delta x, y) \cdot \mathbf{j} \Delta y = N(x + \Delta x, y) \Delta y$
- Esquerda: $F(x, y) \cdot (-\mathbf{j}) \Delta y = -N(x, y) \Delta y$.

Somamos pares opostos para obter

Topo e fundo:

$$-(M(x, y + \Delta y) - M(x, y))\Delta x \approx -\left(\frac{\partial M}{\partial y} \Delta y\right)\Delta x$$

Direita e esquerda:

$$(N(x + \Delta x, y) - N(x, y))\Delta y \approx \left(\frac{\partial N}{\partial x} \Delta x\right)\Delta y$$

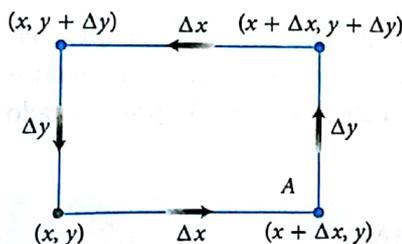


FIGURA 16.26 O retângulo para definir o rotacional (densidade de circulação) de um campo vetorial em um ponto (x, y) .

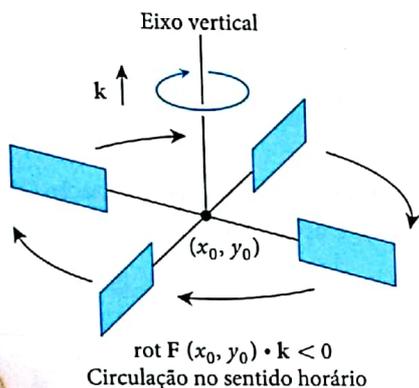
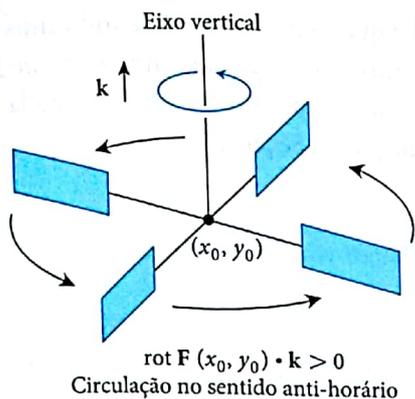


FIGURA 16.27 No escoamento de um fluido incompressível sobre uma região plana, a componente k do rotacional mede a taxa de rotação do fluido em um ponto. A componente k do rotacional é positiva em pontos onde a rotação tem sentido anti-horário e negativa onde a rotação tem sentido horário.

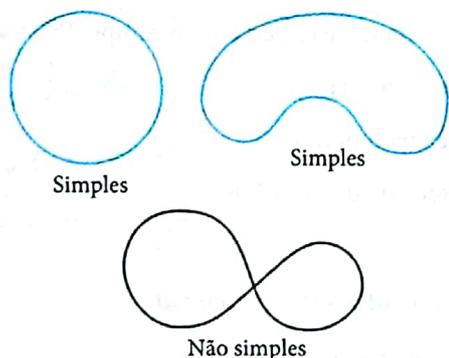


FIGURA 16.28 Ao provarmos o teorema de Green, distinguimos dois tipos de curvas fechadas, simples e não simples. As curvas simples não têm interseção com elas mesmas. Uma circunferência é simples, mas uma figura 8 não é.

Somando ambos os lados dessas duas últimas equações e dividindo-os por $\Delta x \Delta y$ temos uma estimativa da densidade de circulação para o retângulo:

$$\frac{\text{Fluxo no retângulo}}{\text{área do retângulo}} \approx \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

Fazemos Δx e Δy tenderem a zero para definir o que chamamos *densidade de circulação* de F no ponto (x, y) .

A orientação positiva da densidade de circulação para o plano é o sentido *anti-horário* de rotação ao redor do eixo vertical, olhando-se o plano xy da extremidade do versor (vertical) k (Figura 16.27). O valor da circulação é, na realidade, a componente k de um vetor de circulação mais geral que definiremos na Seção 16.7, chamado *rotacional* do campo vetorial F . Para o teorema de Green, precisamos apenas dessa componente k .

Definição Componente k do rotacional

A componente k do rotacional (densidade de circulação), de um campo vetorial $F = Mi + Nj$ no ponto (x, y) é o escalar

$$(\text{rot } F) \cdot k = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \tag{2}$$

Se houver água se movendo sobre uma região do plano xy em uma camada fina, então a componente k da circulação, ou rotacional, em um ponto (x_0, y_0) fornece uma maneira de medir a que velocidade e em qual sentido uma roda de pás pequena girará se for colocada na água em (x_0, y_0) com seu eixo perpendicular ao plano, paralelo a k (Figura 16.27).

EXEMPLO 2 Encontrando a componente k do rotacional

Encontre a componente k do rotacional para o campo vetorial

$$F(x, y) = (x^2 - y)\mathbf{i} + (xy - y^2)\mathbf{j}.$$

SOLUÇÃO Usamos a fórmula na Equação (2):

$$(\text{rot } F) \cdot k = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(xy - y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y) = y + 1$$

Duas formas para o teorema de Green

Em uma forma, o teorema de Green diz que, sob condições adequadas, o fluxo exterior de um campo vetorial através de uma curva fechada simples no plano (Figura 16.28) é igual à integral dupla do divergente do campo sobre a região limitada pela curva. Lembre-se das fórmulas para o fluxo nas equações (3) e (4) na Seção 16.2.

Teorema 3 Teorema de Green (fluxo-divergência ou forma normal)

O fluxo exterior de um campo $F = Mi + Nj$ através de uma curva fechada simples C é igual à integral dupla de $\text{div } F$ sobre a região R limitada por C .

$$\oint_C F \cdot \mathbf{n} \, ds = \oint_C M \, dy - N \, dx = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dx \, dy \tag{3}$$

Fluxo exterior Integral de divergência

Em outra forma, o teorema de Green diz que a circulação no sentido anti-horário de um campo vetorial em torno de uma curva fechada simples é a integral dupla da componente k do rotacional do campo sobre a região limitada pela curva. Revise a Equação (2) para circulação na Seção 16.2.

Teorema 4 Teorema de Green (circulação-rotacional ou forma tangencial)

A circulação no sentido anti-horário de um campo $F = Mi + Nj$ em torno de uma curva fechada simples C no plano é igual à integral dupla de $(\text{rot } F) \cdot k$ sobre a região R limitada por C .

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \oint_C M \, dx + N \, dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx \, dy \quad (4)$$

Circulação no sentido anti-horário

Integral do rotacional

As duas formas do teorema de Green são equivalentes. Aplicando a Equação (3) ao campo $\mathbf{G}_1 = Ni - Mj$ temos a Equação (4), e aplicando a Equação (4) a $\mathbf{G}_2 = -Ni + Mj$, temos a Equação (3).

Exercícios 16.4

Verificando o teorema de Green

Nos exercícios 1–4, verifique a conclusão do teorema de Green calculando ambos os lados das equações (3) e (4) para o campo $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$. Tome os domínios de integração em cada caso como o disco $R: x^2 + y^2 \leq a^2$ e sua circunferência de fronteira $C: \mathbf{r} = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \sin t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

1. $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
2. $\mathbf{F} = y\mathbf{i}$
3. $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} - 3y\mathbf{j}$
4. $\mathbf{F} = -x^2y\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j}$

Circulação no sentido anti-horário e fluxo exterior

Nos exercícios 5–10, use o teorema de Green para encontrar a circulação no sentido anti-horário e o fluxo exterior para o campo \mathbf{F} e a curva C .

5. $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j}$
C: O quadrado limitado por $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$
6. $\mathbf{F} = (x^2 + 4y)\mathbf{i} + (x + y^2)\mathbf{j}$
C: O quadrado limitado por $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$
7. $\mathbf{F} = (y^2 - x^2)\mathbf{i} + (x^2 + y^2)\mathbf{j}$
C: O triângulo limitado por $y = 0$, $x = 3$ e $y = x$
8. $\mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} - (x^2 + y^2)\mathbf{j}$
C: O triângulo limitado por $y = 0$, $x = 1$, e $y = x$
9. $\mathbf{F} = (x + e^x \sin y)\mathbf{i} + (x + e^x x \cos y)\mathbf{j}$
C: O laço do lado direito da lemniscata $r^2 = \cos 2\theta$.
10. $\mathbf{F} = \left(\operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x}\right)\mathbf{i} + \ln(x^2 + y^2)\mathbf{j}$
C: A fronteira da região definida pelas desigualdades em coordenadas polares $1 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq \pi$

11. Encontre a circulação no sentido anti-horário e o fluxo exterior do campo $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$ ao redor e através da fronteira da região limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = x$ no primeiro quadrante.
12. Encontre a circulação no sentido anti-horário e o fluxo exterior do campo $\mathbf{F} = (-\sin y)\mathbf{i} + (x \cos y)\mathbf{j}$ ao redor e através do quadrado cortado do primeiro quadrante pelas retas $x = \pi/2$ e $y = \pi/2$.
13. Encontre o fluxo exterior do campo

$$\mathbf{F} = \left(3xy - \frac{x}{1 + y^2}\right)\mathbf{i} + (e^x + \operatorname{tg}^{-1} y)\mathbf{j}$$

através da cardióide $r = a(1 + \cos \theta)$, $a > 0$.

14. Encontre a circulação no sentido anti-horário de $\mathbf{F} = (y + e^x \ln y)\mathbf{i} + (e^x/y)\mathbf{j}$ ao redor da fronteira da região que é limitada acima pela curva $y = 3 - x^2$ e abaixo pela curva $y = x^4 + 1$.

Trabalho

Nos exercícios 15 e 16, encontre o trabalho realizado por \mathbf{F} para mover uma partícula uma vez no sentido anti-horário ao redor da curva dada.

15. $\mathbf{F} = 2xy^3\mathbf{i} + 4x^2y^2\mathbf{j}$
C: A fronteira da região “triangular” no primeiro quadrante limitada pelo eixo x , pela reta $x = 1$ e pela curva $y = x^3$.
16. $\mathbf{F} = (4x - 2y)\mathbf{i} + (2x - 4y)\mathbf{j}$
C: A circunferência $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$

Calculando integrais de linha no plano

Aplique o teorema de Green para calcular as integrais nos exercícios 17–20.

17. $\oint_C (y^2 dx + x^2 dy)$
 C: O triângulo limitado por $x = 0$, $x + y = 1$, $y = 0$
18. $\oint_C (3y dx + 2x dy)$
 C: A fronteira de $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \sin x$
19. $\oint_C (6y + x) dx + (y + 2x) dy$
 C: A circunferência $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$
20. $\oint_C (2x + y^2) dx + (2xy + 3y) dy$
 C: Qualquer curva fechada simples no plano para o qual o teorema de Green é válido.

Calculando áreas com o teorema de Green

Se uma curva fechada simples C no plano e a região R que ela engloba satisfazem as hipóteses do teorema de Green, a área de R é dada por

Fórmula da área do teorema de Green

$$\text{Área de } R = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx \quad (13)$$

O motivo é que, pela Equação (3), lida ao contrário,

$$\begin{aligned} \text{Área de } R &= \iint_R dy dx = \iint_R \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) dy dx \\ &= \oint_C \frac{1}{2} x dy - \frac{1}{2} y dx \end{aligned}$$

Use a fórmula da área dada pelo teorema de Green (Equação 13) para encontrar as áreas das regiões limitadas pelas curvas nos exercícios 21–24.

21. A circunferência $\mathbf{r}(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \sin t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$
22. A elipse $\mathbf{r}(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (b \sin t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$
23. A astróide $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t)\mathbf{i} + (\sin^3 t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$
24. A curva $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + ((t^3/3) - t)\mathbf{j}$, $-\sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{3}$ (veja a figura a seguir).

