23. Circulação e fluxo Encontre a circulação e o fluxo dos campos

$$\mathbf{F}_1 = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{F}_2 = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

ao redor e através das curvas a seguir.

(a) A circunferência $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

(b) A elipse $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (4 \operatorname{sen} t)\mathbf{j}, 0 \leq t \leq 2\pi$

24. Fluxo através de uma circunferência Encontre o fluxo dos campos

$$\mathbf{F}_1 = 2x\mathbf{i} - 3y\mathbf{j} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{F}_2 = 2x\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j}$$

através da circunferência

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \operatorname{sen} t)\mathbf{j}\,, \qquad 0 \leq \mathrm{t} \leq 2\pi$$

Circulação e fluxo

Nos exercícios 25–28, encontre a circulação e o fluxo do campo $\mathbf{F}$ ao redor e através do caminho semicircular fechado que consiste no arco semicircular $\mathbf{r}_1(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \operatorname{sen} t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq \pi$, seguido pelo segmento de reta $\mathbf{r}_2(t) = t\mathbf{i}$, $-a \leq t \leq a$.

25. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

26. $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$

27. $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

28. $\mathbf{F} = -y^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$

29. **Integrais de escoamento** Encontre o escoamento do campo de velocidade $\mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} - (x^2 + y^2)\mathbf{j}$ ao longo de cada um dos caminhos a seguir de $(1, 0)$ até $(-1, 0)$ no plano xy.
    (a) A metade superior da circunferência $x^2 + y^2 = 1$
    (b) O segmento de reta de $(1, 0)$ até $(-1, 0)$.
    (c) O segmento de reta de $(1, 0)$ até $(0, -1)$ seguido pelo segmento de reta de $(0, -1)$ até $(-1, 0)$.

30. **Fluxo através de um triângulo** Encontre o fluxo exterior do campo $\mathbf{F}$ do Exercício 29 através do triângulo de vértices $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$.

EXEMPLO 4 Mostrando que uma forma diferencial é exata

Mostre que $y\,dx + x\,dy + 4\,dz$ é exata e calcule a integral

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-1)} y\,dx + x\,dy + 4\,dz$$

sobre o segmento de reta de $(1, 1, 1)$ até $(2, 3, -1)$.

SOLUÇÃO Fazemos $M = y$, $N = x$, $P = 4$ e aplicamos o teste para exatidão:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N}{\partial z}, \qquad \frac{\partial M}{\partial z} = 0 = \frac{\partial P}{\partial x}, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 1 = \frac{\partial M}{\partial y}$$

Essas igualdades nos dizem que $y\,dx + x\,dy + 4\,dz$ é exata, assim

$$y\,dx + x\,dy + 4\,dz = df$$

para alguma função f, e o valor da integral é $f(2, 3, -1) - f(1, 1, 1)$.

Encontramos f a menos de uma constante integrando as equações

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 4 \tag{4}$$

Da primeira equação, obtemos

$$f(x, y, z) = xy + g(y, z).$$

A segunda equação nos diz que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{\partial g}{\partial y} = x, \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

Assim, g é uma função de z apenas e

$$f(x, y, z) = xy + h(z).$$

A terceira das Equações (4) nos diz que

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 + \frac{dh}{dz} = 4, \qquad \text{ou} \qquad h(z) = 4z + C$$

Portanto,

$$f(x, y, z) = xy + 4z + C.$$

O valor da integral é

$$f(2, 3, -1) - f(1, 1, 1) = 2 + C - (5 + C) = -3.$$

Exercícios 16.3

Fazendo o teste para campos conservativos

Quais dos campos nos exercícios 1–6 são conservativos e quais não são?

1. $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$
2. $\mathbf{F} = (y \operatorname{sen} z)\mathbf{i} + (x \operatorname{sen} z)\mathbf{j} + (xy \cos z)\mathbf{k}$
3. $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} - y\mathbf{k}$
4. $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
5. $\mathbf{F} = (z + y)\mathbf{i} + z\mathbf{j} + (y + x)\mathbf{k}$
6. $\mathbf{F} = (e^x \cos y)\mathbf{i} - (e^x \operatorname{sen} y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

Encontrando funções potenciais

Nos exercícios 7–12, encontre uma função potencial f para o campo $\mathbf{F}$.

7. $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$
8. $\mathbf{F} = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$
9. $\mathbf{F} = e^{y+2z}(\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 2x\mathbf{k})$
10. $\mathbf{F} = (y \operatorname{sen} z)\mathbf{i} + (x \operatorname{sen} z)\mathbf{j} + (xy\cos z)\mathbf{k}$
11. $\mathbf{F} = (\ln x + \sec^2(x + y))\mathbf{i} + \left(\sec^2(x + y) + \dfrac{y}{y^2 + z^2}\right)\mathbf{j} + \dfrac{z}{y^2 + z^2}\mathbf{k}$
12. $\mathbf{F} = \dfrac{y}{1 + x^2y^2}\mathbf{i} + \left(\dfrac{x}{1 + x^2y^2} + \dfrac{z}{\sqrt{1 - y^2z^2}}\right)\mathbf{j} + \left(\dfrac{y}{\sqrt{1 - y^2z^2}} + \dfrac{1}{z}\right)\mathbf{k}$

Calculando integrais de formas diferenciais

Nos exercícios 13–17, mostre que as formas diferenciais nas integrais são exatas. Depois calcule as integrais.

13. $\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(2,3,-6)} 2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz$
14. $\displaystyle\int_{(1,1,2)}^{(3,5,0)} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$
15. $\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} 2xy\,dx + (x^2 - z^2)\,dy - 2yz\,dz$
16. $\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(3,3,1)} 2x\,dx - y^2\,dy - \frac{4}{1 + z^2}\,dz$
17. $\displaystyle\int_{(1,0,0)}^{(0,1,1)} \operatorname{sen} y \cos x\,dx + \cos y \operatorname{sen} x\,dy + dz$

Embora eles não estejam definidos em todo o espaço R^3, os campos associados aos exercícios 18–22 possuem domínios simplesmente conexos e o teste da componente pode ser usado para mostrar que eles são conservativos. Encontre uma possível função para cada campo e calcule as integrais como no Exemplo 4.

18. $\displaystyle\int_{(0,2,1)}^{(1,\pi/2,2)} 2\cos y\,dx + \left(\frac{1}{y} - 2x\operatorname{sen} y\right)dy + \frac{1}{z}\,dz$
19. $\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(1,2,3)} 3x^2\,dx + \frac{z^2}{y}\,dy + 2z\ln y\,dz$
20. $\displaystyle\int_{(1,2,1)}^{(2,1,1)} (2x\ln y - yz)\,dx + \left(\frac{x^2}{y} - xz\right)dy - xy\,dz$
21. $\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} \frac{1}{y}\,dx + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right)dy - \frac{y}{z^2}\,dz$
22. $\displaystyle\int_{(-1,-1,-1)}^{(2,2,2)} \frac{2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz}{x^2 + y^2 + z^2}$

23. **Revendo o Exemplo 4** Calcule a integral
$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-1)} y\,dx + x\,dy + 4\,dz$$
do Exemplo 4 encontrando equações paramétricas para o segmento de reta de (1, 1, 1) a (2, 3, – 1) e calculando a integral de linha de $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ ao longo do segmento. Como $\mathbf{F}$ é conservativo, a integral é independente do caminho.

24. Calcule
$$\int_C x^2\,dx + yz\,dy + (y^2/2)\,dz$$
ao longo do segmento de reta C unindo (0, 0, 0) a (0, 3, 4).

Teoria, aplicações e exemplos

Independência do caminho Mostre que os valores das integrais nos exercícios 25 e 26 não dependem do caminho tomado de A a B.

25. $\displaystyle\int_A^B z^2\,dx + 2y\,dy + 2xz\,dz$
26. $\displaystyle\int_A^B \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

Nos exercícios 27 e 28, encontre uma função potencial para $\mathbf{F}$.

27. $\mathbf{F} = \dfrac{2x}{y}\mathbf{i} + \left(\dfrac{1 - x^2}{y^2}\right)\mathbf{j}$
28. $\mathbf{F} = (e^x \ln y)\mathbf{i} + \left(\dfrac{e^x}{y} + \operatorname{sen} z\right)\mathbf{j} + (y\cos z)\mathbf{k}$

29. **Trabalho ao longo de caminhos diferentes** Encontre o trabalho realizado por $\mathbf{F} = (x^2 + y)\mathbf{i} + (y^2 + x)\mathbf{j} + ze^z\mathbf{k}$ sobre os caminhos de (1, 0, 0) a (1, 0, 1) a seguir.
   (a) O segmento de reta $x = 1, y = 0, 0 \le z \le 1$
   (b) A hélice $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + (t/2\pi)\mathbf{k}, 0 \le t \le 2\pi$
   (c) O eixo x de (1, 0, 0) a (0, 0, 0) seguido pela parábola $z = x^2, y = 0$ de (0, 0, 0) a (1, 0, 1).

30. **Trabalho ao longo de caminhos diferentes** Encontre o trabalho realizado por $\mathbf{F} = e^{yz}\mathbf{i} + (xze^{yz} + z\cos y)\mathbf{j} + (xye^{yz} + \operatorname{sen} y)\mathbf{k}$ sobre os caminhos de (1, 0, 1) a (1, $\pi/2$, 0) a seguir.
   (a) O segmento de reta $x = 1, y = \pi t/2, z = 1 - t, 0 \le t \le 1$.
   (b) O segmento de reta de (1, 0, 1) à origem seguido pelo segmento de reta da origem (1, $\pi/2$, 0).
   (c) O segmento de reta de (1, 0, 1) a (1, 0, 0), seguido pelo eixo x de (1, 0, 0) à origem, seguido pela parábola $y = \pi x^2/2, z = 0$, daí até (1, $\pi/2$, 0).

31. **Calculando uma integral de trabalho de duas maneiras** Seja $\mathbf{F} = \nabla(x^3y^2)$ e seja C o caminho no plano xy de (–1, 1) a (1, 1) que consiste no segmento de reta

de $(-1, 1)$ a $(0, 0)$ seguido pelo segmento de reta de $(0, 0)$ a $(1, 1)$. Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ de duas maneiras.

(a) Encontre parametrizações para os segmentos que formam C e calcule a integral.

(b) Usando $f(xy) = x^3y^2$ como uma função potencial para **F**.

32. Integral ao longo de caminhos diferentes Calcule $\int_C 2x \cos y\, dx - x^2 \operatorname{sen} y\, dy$ ao longo dos caminhos C a seguir no plano xy.

(a) A parábola $y = (x - 1)^2$ de $(1, 0)$ até $(0, 1)$.

(b) O segmento de reta de $(-1, \pi)$ até $(1, 0)$.

(c) O eixo x de $(-1, 0)$ até $(1, 0)$.

(d) O astróide $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}^3 t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, no sentido anti-horário de $(1, 0)$ de volta a $(1, 0)$.

33. (a) Forma diferencial exata Como as constantes a, b e c estão relacionadas se a forma diferencial a seguir for exata?

$$(ay^2 + 2czx)\, dx + y(bx + cz)\, dy + (ay^2 + cx^2)\, dz$$

(b) Campo gradiente Para quais valores de b e c

$$\mathbf{F} = (y^2 + 2czx)\mathbf{i} + y(bx + cz)\mathbf{j} + (y^2 + cx^2)\mathbf{k}$$

será um campo gradiente?

34. Gradiente de uma integral de linha Suponha que $\mathbf{F} = \nabla f$ seja um campo vetorial conservativo e

$$g(x, y, z) = \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Mostre que $\nabla g = \mathbf{F}$.

35. Caminho de menor trabalho Pediram para você encontrar o caminho ao longo do qual um campo de força **F** realizará o menor trabalho para mover uma partícula entre dois locais. Cálculos rápidos de sua parte mostram que **F** é conservativo. Como você deve responder? Justifique a sua resposta.

36. Uma experiência reveladora Por meio de experimentos, você descobre que, para mover um objeto ao longo do caminho C_1 de A a B, um campo de força **F** realiza apenas metade do trabalho que realiza para mover o objeto ao longo do caminho C_2 de A a B. O que você pode concluir sobre **F**? Justifique a sua resposta.

37. Trabalho realizado por uma força constante Mostre que o trabalho realizado por um campo de força constante $\mathbf{F} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ para mover uma partícula ao longo de qualquer caminho de A até B é $W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB}$.

38. Campo gravitacional

(a) Encontre uma função potencial para o campo gravitacional

$$\mathbf{F} = -GmM\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (G, m \text{ e } M \text{ constantes})$$

(b) Sejam P_1 e P_2 pontos a uma distância s_1 e s_2 da origem. Mostre que o trabalho realizado pelo campo gravitacional em **(a)** para mover uma partícula de P_1 a P_2 é

$$GmM\left(\frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1}\right)$$