A velocidade da asa-delta como uma função do tempo é

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(t) = -(3 \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (3 \cos t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$$

Integrando ambos os lados dessa última equação diferencial, obtemos

$$\mathbf{r}(t) = (3 \cos t)\mathbf{i} + (3 \operatorname{sen} t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k} + \mathbf{C}_2$$

Então usamos a condição inicial $\mathbf{r}(0) = 3\mathbf{i}$ para encontrar $\mathbf{C}_2$:

$$3\mathbf{i} = (3 \cos 0)\mathbf{i} + (3 \operatorname{sen} 0)\mathbf{j} + (0^2)\mathbf{k} + \mathbf{C}_2$$

$$3\mathbf{i} = 3\mathbf{i} + (0)\mathbf{j} + (0)\mathbf{k} + \mathbf{C}_2$$

$$\mathbf{C}_2 = \mathbf{0}$$

A posição da asa-delta como uma função de t é

$$\mathbf{r}(t) = (3 \cos t)\mathbf{i} + (3 \operatorname{sen} t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$$

Esta é a trajetória da asa-delta que conhecemos do Exemplo 4 e é mostrada na Figura 13.7.

Nota: É peculiar a esse exemplo o fato de que ambos os vetores constantes da integração, $\mathbf{C}_1$ e $\mathbf{C}_2$, resultaram em $\mathbf{0}$. Os exercícios 31 e 32 dão resultados diferentes para essas constantes.

Exercícios 13.1

Movimentos no plano *xy*

Nos exercícios 1–4, $\mathbf{r}(t)$ é a posição de uma partícula no plano xy no instante t. Encontre equações em x e y cujo gráfico represente a trajetória da partícula. Depois encontre os vetores aceleração e velocidade da partícula no instante t dado.

1. $\mathbf{r}(t) = (t + 1)\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j}, \quad t = 1$

2. $\mathbf{r}(t) = (t^2 + 1)\mathbf{i} + (2t - 1)\mathbf{j}, \quad t = 1/2$

3. $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + \frac{2}{9}e^{2t}\mathbf{j}, \quad t = \ln 3$

4. $\mathbf{r}(t) = (\cos 2t)\mathbf{i} + (3 \operatorname{sen} 2t)\mathbf{j}, \quad t = 0$

Nos exercícios 5–8, dê os vetores posição de partículas movendo-se ao longo de várias curvas no plano xy. Em cada um dos casos, encontre os vetores velocidade e aceleração da partícula nos intervalos dados e esboce-os como vetores sobre a curva.

5. Movimento no círculo $x^2 + y^2 = 1$

$$\mathbf{r}(t) = (\operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}; \qquad t = \pi/4 \text{ e } \pi/2$$

6. Movimento no círculo $x^2 + y^2 = 16$

$$\mathbf{r}(t) = \left(4 \cos \frac{t}{2}\right)\mathbf{i} + \left(4 \operatorname{sen} \frac{t}{2}\right)\mathbf{j}; \quad t = \pi \text{ e } 3\pi/2$$

7. Movimento na ciclóide $x = t - \operatorname{sen} t$, $y = 1 - \cos t$

$$\mathbf{r}(t) = (t - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j}; \qquad t = \pi \text{ e } 3\pi/2$$

8. Movimento na parábola $y = x^2 + 1$

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (t^2 + 1)\mathbf{j}; \qquad t = -1, 0 \text{ e } 1$$

Velocidade e aceleração no espaço

Nos exercícios 9–14, $\mathbf{r}(t)$ é a posição de uma partícula no espaço no instante t. Encontre os vetores velocidade e aceleração da partícula. Depois encontre o módulo da velocidade e a direção do movimento ao valor de t dado. Escreva a velocidade da partícula naquele instante como o produto do módulo de sua velocidade e de sua direção.

9. $\mathbf{r}(t) = (t + 1)\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}, \quad t = 1$

10. $\mathbf{r}(t) = (1 + t)\mathbf{i} + \frac{t^2}{\sqrt{2}}\mathbf{j} + \frac{t^3}{3}\mathbf{k}, \quad t = 1$

11. $\mathbf{r}(t) = (2 \cos t)\mathbf{i} + (3 \operatorname{sen} t)\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}, \quad t = \pi/2$

12. $\mathbf{r}(t) = (\sec t)\mathbf{i} + (\operatorname{tg} t)\mathbf{j} + \frac{4}{3}t\mathbf{k}, \quad t = \pi/6$

13. $\mathbf{r}(t) = (2 \ln(t + 1))\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{t^2}{2}\mathbf{k}, \quad t = 1$

14. $\mathbf{r}(t) = (e^{-t})\mathbf{i} + (2 \cos 3t)\mathbf{j} + (2 \operatorname{sen} 3t)\mathbf{k}, \quad t = 0$

Nos exercícios 15–18, $\mathbf{r}(t)$ é a posição de uma partícula no espaço no instante t. Encontre o ângulo entre os vetores aceleração e velocidade no instante $t = 0$.

15. $\mathbf{r}(t) = (3t + 1)\mathbf{i} + \sqrt{3}t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$

16. $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}t - 16t^2\right)\mathbf{j}$

17. $\mathbf{r}(t) = (\ln(t^2 + 1))\mathbf{i} + (\text{tg}^{-1} t)\mathbf{j} + \sqrt{t^2 + 1}\,\mathbf{k}$

18. $\mathbf{r}(t) = \frac{4}{9}(1 + t)^{3/2}\mathbf{i} + \frac{4}{9}(1 - t)^{3/2}\mathbf{j} + \frac{1}{3}t\mathbf{k}$

Nos exercícios 19 e 20, $\mathbf{r}(t)$ é o vetor posição de uma partícula no espaço no instante t. Encontre o instante (ou os instantes), ao intervalo de tempo dado, em que os vetores velocidade e aceleração são ortogonais.

19. $\mathbf{r}(t) = (t - \text{sen}\, t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi$

20. $\mathbf{r}(t) = (\text{sen}\, t)\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (\cos t)\mathbf{k}, \quad t \ge 0$

Integrando funções a valores vetoriais

Calcule as integrais nos exercícios 21–26.

21. $\int_0^1 [t^3\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + (t + 1)\mathbf{k}]\, dt$

22. $\int_1^2 \left[(6 - 6t)\mathbf{i} + 3\sqrt{t}\mathbf{j} + \left(\frac{4}{t^2}\right)\mathbf{k}\right] dt$

23. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} [(\text{sen}\, t)\mathbf{i} + (1 + \cos t)\mathbf{j} + (\sec^2 t)\mathbf{k}]\, dt$

24. $\int_0^{\pi/3} [(\sec t\, \text{tg}\, t)\mathbf{i} + (\text{tg}\, t)\mathbf{j} + (2\,\text{sen}\, t \cos t)\mathbf{k}]$

25. $\int_1^4 \left[\frac{1}{t}\mathbf{i} + \frac{1}{5 - t}\mathbf{j} + \frac{1}{2t}\mathbf{k}\right] dt$

26. $\int_0^1 \left[\frac{2}{\sqrt{1 - t^2}}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{1 + t^2}\mathbf{k}\right] dt$

Problemas de valor inicial para funções a valores vetoriais

Resolva os problemas de valor inicial nos exercícios 27–32 para $\mathbf{r}$ como uma função vetorial de t.

27. Equação diferencial: $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -t\mathbf{i} - t\mathbf{j} - t\mathbf{k}$
Condição inicial: $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

28. Equação diferencial: $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (180t)\mathbf{i} + (180t - 16t^2)\mathbf{j}$
Condição inicial: $\mathbf{r}(0) = 100\mathbf{j}$

29. Equação diferencial: $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{3}{2}(t + 1)^{1/2}\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + \frac{1}{t + 1}\mathbf{k}$
Condição inicial: $\mathbf{r}(0) = \mathbf{k}$

30. Equação diferencial: $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (t^3 + 4t)\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}$
Condição inicial: $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

31. Equação diferencial: $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -32\mathbf{k}$
Condição inicial: $\mathbf{r}(0) = 100\mathbf{k}$ e
$\left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_{t=0} = 8\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$

32. Equação diferencial: $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$
Condição inicial: $\mathbf{r}(0) = 10\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$ e
$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_{t=0} = 0$

Retas tangentes a curvas lisas

Como mencionado no texto, a reta tangente a uma curva lisa $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ em $t = t_0$ é a reta que passa pelo ponto $(f(t_0), g(t_0), h(t_0))$ e é paralela a $\mathbf{v}(t_0)$, o vetor velocidade da curva em t_0. Nos exercícios 33–36, encontre equações paramétricas para a reta que é tangente à curva dada em dado valor paramétrico $t = t_0$.

33. $\mathbf{r}(t) = (\text{sen}\, t)\mathbf{i} + (t^2 - \cos t)\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}, \quad t_0 = 0$

34. $\mathbf{r}(t) = (2\,\text{sen}\, t)\mathbf{i} + (2\cos t)\mathbf{j} + 5t\mathbf{k}, \quad t_0 = 4\pi$

35. $\mathbf{r}(t) = (a\,\text{sen}\, t)\mathbf{i} + (a\cos t)\mathbf{j} + bt\mathbf{k}, \quad t_0 = 2\pi$

36. $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\text{sen}\, t)\mathbf{j} + (\text{sen}\, 2t)\mathbf{k}, \quad t_0 = \frac{\pi}{2}$

Movimento em trajetórias circulares

37. Cada uma das equações de (a) a (e) descreve o movimento de uma partícula que tem mesma trajetória — o círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$. Embora a trajetória de cada partícula de (a) a (e) seja a mesma, o comportamento, ou a "dinâmica", de cada partícula é diferente. Para cada partícula, responda às questões a seguir.

i. A partícula tem módulo de velocidade constante? Em caso afirmativo, qual módulo?

ii. O vetor aceleração da partícula é sempre ortogonal a seu vetor velocidade?

iii. A partícula se move no sentido horário ou anti-horário ao redor do círculo?

iv. A partícula começa no ponto (1, 0)?

(a) $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\text{sen}\, t)\mathbf{j}, \quad t \ge 0$

(b) $\mathbf{r}(t) = \cos(2t)\mathbf{i} + \text{sen}(2t)\mathbf{j}, \quad t \ge 0$

(c) $\mathbf{r}(t) = \cos(t - \pi/2)\mathbf{i} + \text{sen}(t - \pi/2)\mathbf{j}, \quad t \ge 0$

(d) $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} - (\text{sen}\, t)\mathbf{j}, \quad t \ge 0$

(e) $\mathbf{r}(t) = \cos(t^2)\mathbf{i} + \text{sen}(t^2)\mathbf{j}, \quad t \ge 0$

38. Mostre que a função a valores vetoriais

$$\mathbf{r}(t) = (2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) + \cos t\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}\right) + \text{sen}\, t\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}\right)$$

descreve o movimento de uma partícula no círculo de raio 1 centrado no ponto (2, 2, 1) e contido no plano $x + y - 2z = 2$.