Exercícios

Nos problemas 1–12, ache uma solução geral para a equação diferencial dada.

1. $y'' + 6y' + 9y = 0$
2. $2y'' + 7y' - 4y = 0$
3. $y'' - y' - 2y = 0$
4. $y'' + 5y' + 6y = 0$
5. $y'' - 5y' + 6y = 0$
6. $y'' + 8y' + 16y = 0$
7. $6y'' + y' - 2y = 0$
8. $z'' + z' - z = 0$
9. $4y'' - 4y' + y = 0$
10. $y'' - y' - 11y = 0$
11. $4w'' + 20w' + 25w = 0$
12. $3y'' + 11y' - 7y = 0$

Nos problemas 13–20, resolva o problema de valor iniciado dado.

13. $y'' + 2y' - 8y = 0$; $y(0) = 3$, $y'(0) = -12$
14. $y'' + y' = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$
15. $y'' - 4y' - 5y = 0$; $y(-1) = 3$, $y'(-1) = 9$
16. $y'' - 4y' + 3y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 1/3$
17. $z'' - 2z' - 2z = 0$; $z(0) = 0$, $z'(0) = 3$
18. $y'' - 6y' + 9y = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 25/3$
19. $y'' + 2y' + y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -3$
20. $y'' - 4y' + 4y = 0$; $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$

21. Equações de primeira ordem com coeficientes constantes.
   (a) Substituindo $y = e^{rt}$, encontramos a equação auxiliar para a equação linear de primeira ordem
   $$ay' + by = 0 \ ,$$
   em que a e b são constantes com $a \neq 0$.
   (b) Use o resultado do item (a) para encontrar a solução geral.

Nos problemas 22–25, use o método descrito no Problema 21 para encontrar uma solução geral para a equação dada.

22. $3y' - 7y = 0$
23. $5y' + 4y = 0$
24. $3z' + 11z = 0$
25. $6w' - 13w = 0$

26. **Problemas de valor de fronteira.** Quando os valores de uma solução para uma equação diferencial são especificados em dois pontos diferentes, essas condições são chamadas de **condições de fronteira**. (Ao contrário, as condições iniciais especificam os valores de uma função e sua derivada no mesmo ponto.) A finalidade deste exercício é mostrar que, para problemas de valor de fronteira, não há teorema de existência-unicidade que seja semelhante ao Teorema 1. Dado que cada solução para
   (17) $y'' + y = 0$
   tem a forma
   $$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t \ ,$$
   onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, mostre que
   (a) Existe uma solução única para (17) que satisfaz as condições de limite $y(0) = 2$ e $y(\pi/2) = 0$.
   (b) Não existe uma solução para (17) que satisfaz $y(0) = 2$ e $y(\pi) = 0$.
   (c) Existem infinitamente muitas soluções para (17) que satisfazem $y(0) = 2$ e $y(\pi) = -2$.

Nos problemas 27–32, use a Definição 1 para determinar se as funções y_1 e y_2 são linearmente dependentes do intervalo (0, 1).

27. $y_1(t) = \cos t \operatorname{sen} t$, $y_2(t) = \operatorname{sen} 2t$
28. $y_1(t) = e^{3t}$, $y_2(t) = e^{-4t}$
29. $y_1(t) = te^{2t}$, $y_2(t) = e^{2t}$
30. $y_1(t) = t^2 \cos(\ln t)$, $y_2(t) = t^2 \operatorname{sen}(\ln t)$
31. $y_1(t) = \operatorname{tg}^2 t - \sec^2 t$, $y_2(t) \equiv 3$
32. $y_1(t) \equiv 0$, $y_2(t) = e^t$
33. Explique por que duas funções são linearmente dependentes de um intervalo I se e somente se houver constantes c_1 e c_2, *não sendo ambas zero*, de modo que
   $$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = 0 \qquad \text{para todo } t \text{ em } I \ .$$
34. **Wronskiano.** Para duas funções diferenciáveis y_1 e y_2 quaisquer, a função
   (18) $W[y_1, y_2](t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$
   é chamada de *wronskiana*† de y_1 e y_2. Essa função desempenha papel essencial na prova do Teorema 2.
   (a) Mostre que $W[y_1, y_2]$ pode ser convenientemente expresso como o determinante 2 × 2
   $$W[y_1, y_2](t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} \ .$$
   (b) Considere que $y_1(t)$, $y_2(t)$ seja um par de soluções para a equação homogênea $ay'' + by' + cy = 0$ (com $a \neq 0$) em um intervalo aberto I. Prove que $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são linearmente independentes em I se e somente se seu wronskiano nunca for zero em I. [*Dica:* esta é apenas uma reformulação do Lema 1.]
   (c) Mostre que, se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ forem duas funções diferenciáveis quaisquer que são linearmente dependentes de I, então seu wronskiano é identicamente zero em I.
35. **Dependência linear de três funções.** Três funções $y_1(t)$, $y_2(t)$ e $y_3(t)$ são consideradas linearmente dependentes de um intervalo I se, em I, pelo menos uma dessas funções for uma combinação linear das duas restantes [por exemplo, se $y_1(t) = c_1 y_2(t) + c_2 y_3(t)$]. De modo equivalente (compare com o Problema 33), y_1, y_2 e y_3 são linearmente dependentes de I se houver constantes C_1, C_2 e C_3, *não todas zero*, tais que
   $$C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + C_3 y_3(t) = 0 \quad \text{para todo } t \text{ em } I.$$
   Caso contrário, dizemos que essas funções são linearmente independentes em I.
   Para cada um dos seguintes, determine se as três funções dadas são linearmente dependentes ou independentes em $(-\infty, \infty)$:
   (a) $y_1(t) = 1$, $y_2(t) = t$, $y_3(t) = t^2$.
   (b) $y_1(t) = -3$, $y_2(t) = 5 \operatorname{sen}^2 t$, $y_3(t) = \cos^2 t$.
   (c) $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = te^t$, $y_3(t) = t^2 e^t$.
   (d) $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = e^{-t}$, $y_3(t) = \cosh t$.

† *Nota de rodapé histórica:* O termo wronskiano vem do matemático polonês H. Wronski (1778-1863).

Exercícios

Nos problemas 1–8, a equação auxiliar para determinada equação diferencial tem raízes complexas. Ache uma solução geral.

1. $y'' + y = 0$

2. $y'' + 9y = 0$

3. $y'' - 10y' + 26y = 0$

4. $z'' - 6z' + 10z = 0$

5. $y'' - 4y' + 7y = 0$

6. $w'' + 4w' + 6w = 0$

7. $4y'' + 4y' + 6y = 0$

8. $4y'' - 4y' + 26y = 0$

Nos problemas 9–20, encontre uma solução geral.

9. $y'' + 4y' + 8y = 0$

10. $y'' - 8y' + 7y = 0$

11. $z'' + 10z' + 25z = 0$

12. $u'' + 7u = 0$

13. $y'' + 2y' + 5y = 0$

14. $y'' - 2y' + 26y = 0$

15. $y'' + 10y' + 41y = 0$

16. $y'' - 3y' - 11y = 0$

17. $y'' - y' + 7y = 0$

18. $2y'' + 13y' - 7y = 0$

19. $y''' + y'' + 3y' - 5y = 0$

20. $y''' - y'' + 2y = 0$

Nos problemas 21–27, resolva o problema de valor inicial dado.

21. $y'' + 2y' + 2y = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

22. $y'' + 2y' + 17y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$

23. $w'' - 4w' + 2w = 0$; $w(0) = 0$, $w'(0) = 1$

24. $y'' + 9y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

25. $y'' - 2y' + 2y = 0$; $y(\pi) = e^{\pi}$, $y'(\pi) = 0$

26. $y'' - 2y' + y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$

27. $y''' - 4y'' + 7y' - 6y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$

28. Para ver o efeito de alterar o parâmetro b no problema de valor inicial

$$y'' + by' + 4y = 0\ ; \quad y(0) = 1\ , \quad y'(0) = 0\ ,$$

resolva o problema para $b = 5$, 4 e 2 e esboce as soluções.

29. Ache a solução geral para as seguintes equações de ordem mais alta.

(a) $y''' - y'' + y' + 3y = 0$

(b) $y''' + 2y'' + 5y' - 26y = 0$

(c) $y^{iv} + 13y'' + 36y = 0$

30. Usando a representação para $e^{(\alpha+i\beta)t}$ em (6), verifique a Fórmula de derivação (7).

31. Usando a analogia do tipo massa-mola, preveja o comportamento à medida que $t \to +\infty$ da solução para o problema de valor inicial indicado. Depois, confirme sua previsão resolvendo de fato o problema.

(a) $y'' + 16y = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$

(b) $y'' + 100y' + y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

(c) $y'' + 6y' + 8y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

(d) $y'' + 2y' - 3y = 0$; $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$

(e) $y'' - y' - 6y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$