Resumo do capítulo

Neste capítulo, discutimos diversos tipos de equações diferenciais de primeira ordem. Os mais importantes foram as equações separáveis, lineares e exatas. Seus principais recursos e o método de solução são esboçados a seguir.

Equações separáveis: $dy/dx = g(x)p(y)$. Separam as variáveis e integram.

Equações lineares: $dy/dx + P(x)y = Q(x)$. O fator integrante $\mu = \exp[\int P(x)dx]$ reduz a equação a $d(\mu y)/dx = \mu Q$, de modo que $\mu y = \int \mu Q\, dx + C$.

Equações exatas: $dF(x, y) = 0$. As soluções são dadas implicitamente por $F(x, y) = C$. Se $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$, então $M\, dx + N\, dy = 0$ é exata e F é dado por

$$F = \int M\, dx + g(y)\ , \quad \text{onde} \quad g'(y) = N - \frac{\partial}{\partial y}\int M\, dx$$

ou

$$F = \int N\, dy + h(x)\ , \quad \text{onde} \quad h'(x) = M - \frac{\partial}{\partial x}\int N\, dy\ .$$

Quando uma equação não é separável, linear ou exata, pode ser possível encontrar um fator integrante ou realizar uma substituição que nos permitirá resolver a equação.

Fatores integrantes especiais: $\mu M\, dx + \mu N\, dy = 0$ é exata. Se $(\partial M/\partial y - \partial N/\partial x)/N$ depende apenas de x, então

$$\mu(x) = \exp\left[\int\left(\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}\right) dx\right]$$

é um fator integrante. Se $(\partial N/\partial x - \partial M/\partial y)/M$ depende apenas de y, então

$$\mu(y) = \exp\left[\int\left(\frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M}\right) dy\right]$$

é um fator integrante.

opo Riccati estudou um caso particular dessa equação em 1724, durante sua investigação das curvas cujos raios de el y e não da variável x.

Equações homogêneas: $dy/dx = G(y/x)$. Considere $v = y/x$. Então, $dy/dx = v + x(dv/dx)$, e a equação transformada nas variáveis v e x é separável.

Equações na forma: $dy/dx = G(ax + by)$. Considere $z = ax + by$. Então, $dz/dx = a + b(dy/dx)$, e a equação transformada nas variáveis z e x é separável.

Equações de Bernoulli: $dy/dx + P(x)y = Q(x)y^n$. Para $n \neq 0$ ou 1, considere $v = y^{1-n}$. Então, $dv/dx = (1 - n)y^{-n}(dy/dx)$, e a equação transformada nas variáveis v e x é linear.

Use o método discutido em "Equações homogêneas" para resolver os problemas 9-16.

9. $(xy + y^2)dx - x^2\,dy = 0$

10. $(3x^2 - y^2)dx + (xy - x^3y^{-1})dy = 0$

11. $(y^2 - xy)dx + x^2\,dy = 0$

12. $(x^2 + y^2)dx + 2xy\,dy = 0$

13. $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x^2 + t\sqrt{t^2 + x^2}}{tx}$

14. $\dfrac{dy}{d\theta} = \dfrac{\theta \sec(y/\theta) + y}{\theta}$

15. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - y^2}{3xy}$

16. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y(\ln y - \ln x + 1)}{x}$

Use o método discutido em "Equações na forma $dy/dx = G(ax + by)$" para solucionar os problemas 17-20.

17. $dy/dx = \sqrt{x + y} - 1$

18. $dy/dx = (x + y + 2)^2$

19. $dy/dx = (x - y + 5)^2$

20. $dy/dx = \operatorname{sen}(x - y)$

Use o método discutido em "Equações de Bernoulli" para resolver os problemas 21-28.

21. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = x^2y^2$

22. $\dfrac{dy}{dx} - y = e^{2x}y^3$

23. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{x} - x^2y^2$

24. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x - 2} = 5(x - 2)y^{1/2}$

25. $\dfrac{dx}{dt} + tx^3 + \dfrac{x}{t} = 0$

26. $\dfrac{dy}{dx} + y = e^xy^{-2}$

27. $\dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{r^2 + 2r\theta}{\theta^2}$