Exemplo 4

Mostre que

(16) $(x + 3x^3 \text{sen}\, y)dx + (x^4 \cos y)dy = 0$

não é exato, mas que multiplicar essa equação pelo fator x^{-1} gera uma equação exata. Use esse fato para resolver (16).

Solução

Na Equação (16), $M = x + 3x^3 \text{sen}\, y$ e $N = x^4 \cos y$. Como

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^3 \cos y \not\equiv 4x^3 \cos y = \frac{\partial N}{\partial x},$$

a Equação (16) não é exata. Quando multiplicarmos (16) pelo fator x^{-1}, obtemos

(17) $(1 + 3x^2 \text{sen}\, y)dx + (x^3 \cos y)dy = 0$.

Para essa nova equação $M = 1 + 3x^2 \text{sen}\, y$ e $N = x^3 \cos y$. Se testarmos a exatidão, agora descobrimos que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 \cos y = \frac{\partial N}{\partial x},$$

e daí (17) é exato. Ao solucionar (17), descobrimos que a solução é dada implicitamente por $x + x^3 \text{sen}\, y = C$. Como as equações (16) e (17) diferem somente por um fator de x, então qualquer solução para uma será uma solução para a outra sempre que $x \neq 0$. Daí a solução para a Equação (16) ser dada implicitamente por $x + x^3 \text{sen}\, y = C$. ♦

Na Seção 2.5, discutiremos métodos para encontrar fatores que, como x^{-1} no Exemplo 4, mudam equações inexatas para equações exatas.

Exercícios

Nos problemas 1-8, classifique a equação como separável, linear, exata ou nenhuma destas. Observe que algumas equações podem ter mais de uma classificação.

1. $(x^{10/3} - 2y)dx + x\, dy = 0$
2. $(x^2 y + x^4 \cos x)dx - x^3\, dy = 0$
3. $\sqrt{-2y - y^2}\, dx + (3 + 2x - x^2)dy = 0$
4. $(ye^{xy} + 2x)dx + (xe^{xy} - 2y)dy = 0$
5. $xy\, dx + dy = 0$
6. $y^2\, dx + (2xy + \cos y)dy = 0$
7. $[2x + y \cos(xy)]dx + [x \cos(xy) - 2y]dy = 0$
8. $\theta\, dr + (3r - \theta - 1)d\theta = 0$

Nos problemas 9-20, determine se a equação é exata. Se for, então solucione-a.

9. $(2x + y)dx + (x - 2y)dy = 0$
10. $(2xy + 3)dx + (x^2 - 1)dy = 0$
11. $(\cos x \cos y + 2x)dx - (\text{sen}\, x\, \text{sen}\, y + 2y)dy = 0$
12. $(e^x \text{sen}\, y - 3x^2)dx + (e^x \cos y + y^{-2/3}/3)dy = 0$
13. $(t/y)dy + (1 + \ln y)dt = 0$
14. $e^t(y - t)dt + (1 + e^t)dy = 0$
15. $\cos\theta\, dr - (r\, \text{sen}\, \theta - e^\theta)d\theta = 0$
16. $(ye^{xy} - 1/y)dx + (xe^{xy} + x/y^2)dy = 0$
17. $(1/y)dx - (3y - x/y^2)dy = 0$
18. $[2x + y^2 - \cos(x + y)]dx + [2xy - \cos(x + y) - e^y]dy = 0$
19. $\left(2x + \dfrac{y}{1 + x^2y^2}\right)dx + \left(\dfrac{x}{1 + x^2y^2} - 2y\right)dy = 0$
20. $\left[\dfrac{2}{\sqrt{1 - x^2}} + y\cos(xy)\right]dx + [x\cos(xy) - y^{-1/3}]dy = 0$

Nos problemas 21-26, resolva o problema de valor inicial.

21. $(1/x + 2y^2x)dx + (2yx^2 - \cos y)dy = 0$, $y(1) = \pi$
22. $(ye^{xy} - 1/y)dx + (xe^{xy} + x/y^2)dy = 0$, $y(1) = 1$
23. $(e^t y + te^t y)dt + (te^t + 2)dy = 0$, $y(0) = -1$
24. $(e^t x + 1)dt + (e^t - 1)dx = 0$, $x(1) = 1$
25. $(y^2 \text{sen}\, x)dx + (1/x - y/x)dy = 0$, $y(\pi) = 1$
26. $(\text{tg}\, y - 2)dx + (x \sec^2 y + 1/y)dy = 0$, $y(0) = 1$

Fatores integrantes especiais

Teorema 3. Se $(\partial M/\partial y - \partial N/\partial x)/N$ é contínuo e depende somente de x, então

(8) $$\mu(x) = \exp\left[\int\left(\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}\right)dx\right]$$

é um fator integrante para a Equação (1). Se $(\partial N/\partial x - \partial M/\partial y)/M$ é contínuo e depende somente de y, então

(9) $$\mu(y) = \exp\left[\int\left(\frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M}\right)dy\right]$$

é um fator integrante para a Equação (1).

$$\mu(x) = \exp\left[\int\left(\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}\right)dx\right]$$

para a Equação (1). Resumimos essas observações no teorema a seguir.

O Teorema 3 sugere o seguinte procedimento.

Método para encontrar fatores integrantes especiais

Se $M\,dx + N\,dy = 0$ não é separável nem linear, calcule $\partial M/\partial y$ e $\partial N/\partial x$. Se $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$, então a equação é exata. Se não for exata, considere

(10) $$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}\ .$$

Se (10) é uma função de apenas x, então um fator integrante é dado pela fórmula (8). Se não, considere

(11) $$\frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M}\ .$$

Se (11) é uma função apenas de y, então um fator integrante é dado pela fórmula (9).

Exemplo 2

Resolva

(12) $$(2x^2 + y)dx + (x^2y - x)dy = 0\ .$$

Solução

Uma inspeção rápida mostra que a Equação (12) não é separável nem linear. Também observamos que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \not\equiv (2xy - 1) = \frac{\partial N}{\partial x}\ .$$

Como (12) não é exata, calculamos

$$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} = \frac{1 - (2xy - 1)}{x^2y - x} = \frac{2(1 - xy)}{-x(1 - xy)} = \frac{-2}{x}\ .$$

Obtemos uma função de apenas x, de modo que um fator integrante para (12) é dado pela Fórmula (8). Ou seja,

$$\mu(x) = \exp\left(\int \frac{-2}{x}dx\right) = x^{-2}\ .$$

Quando multiplicamos (12) por $\mu = x^{-2}$, obtemos a equação exata

$$(2 + yx^{-2})dx + (y - x^{-1})dy = 0\ .$$

Solucionando essa equação, por fim derivamos a solução implícita

(13) $$2x - yx^{-1} + \frac{y^2}{2} = C\ .$$

Observe que a solução $x \equiv 0$ foi perdida na multiplicação por $\mu = x^{-2}$. Daí, (13) e $x \equiv 0$ são soluções para a Equação (12). ♦

Existem muitas equações diferenciais que não são cobertas pelo Teorema 3, mas apesar disso existe um fator integrante. A principal dificuldade, porém, está em encontrar uma fórmula explícita para esses fatores integrantes, que em geral dependerá de x e de y.

Exercícios

Nos problemas 1-6, identifique a equação como separável, linear, exata ou tendo um fator integrante que é uma função de x apenas ou de y apenas.

1. $(2x + yx^{-1})dx + (xy - 1)dy = 0$
2. $(2y^3 + 2y^2)dx + (3y^2x + 2xy)dy = 0$
3. $(2x + y)dx + (x - 2y)dy = 0$
4. $(y^2 + 2xy)dx - x^2dy = 0$
5. $(x^2\text{sen } x + 4y)dx + x\,dy = 0$
6. $(2y^2x - y)dx + x\,dy = 0$

Nos problemas 7-12, resolva a equação.

7. $(2xy)dx + (y^2 - 3x^2)dy = 0$
8. $(3x^2 + y)dx + (x^2y - x)dy = 0$

9. $(x^4 - x + y)dx - x\,dy = 0$

10. $(2y^2 + 2y + 4x^2)dx - (2xy + x)dy = 0$

11. $(y^2 + 2xy)dx - x^2\,dy = 0$

12. $(2xy^3 + 1)dx + (3x^2y^2 - y^{-1})dy = 0$

Nos problemas 13 e 14, encontre um fator integrante na forma $x^n y^m$ e resolva a equação.

13. $(2y^2 - 6xy)dx + (3xy - 4x^2)dy = 0$

14. $(12 + 5xy)dx + (6xy^{-1} + 3x^2)dy = 0$

15. **(a)** Mostre que, se $(\partial N/\partial x - \partial M/\partial y)/(xM - yN)$ depende apenas do produto xy, ou seja,

$$\frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{xM - yN} = H(xy) \ ,$$

então, a equação $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ tem um fator integrante na forma $\mu(xy)$. Dê a fórmula geral para $\mu(xy)$.

(b) Use a sua resposta do item (a) para encontrar uma solução implícita para

$$(3y + 2xy^2)dx + (x + 2x^2y)dy = 0 \ ,$$

satisfazendo a condição inicial $y(1) = 1$.

16. **(a)** Prove que $Mdx + Ndy = 0$ tem um fator integrante que depende somente da soma $x + y$ se e somente se a expressão

$$\frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M - N}$$

depender somente de $x + y$.