Universidade do Estado de Santa Catarina
Centro de Ciências Tecnológicas - CCT
Departamento de Matemática
Antônio João Fidélis

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I (CDI-I) PROVA I 20/03/2013

É **proibido** o uso de **telefone celular, smartphones, tablets** (que devem permanecer **desligados** durante a prova) ou **calculadoras programáveis**, assim como o empréstimo de materiais durante a prova. Só é permitido o uso de calculadora científica comum.

Não é permitido ao aluno sair da sala antes da entrega desta prova.

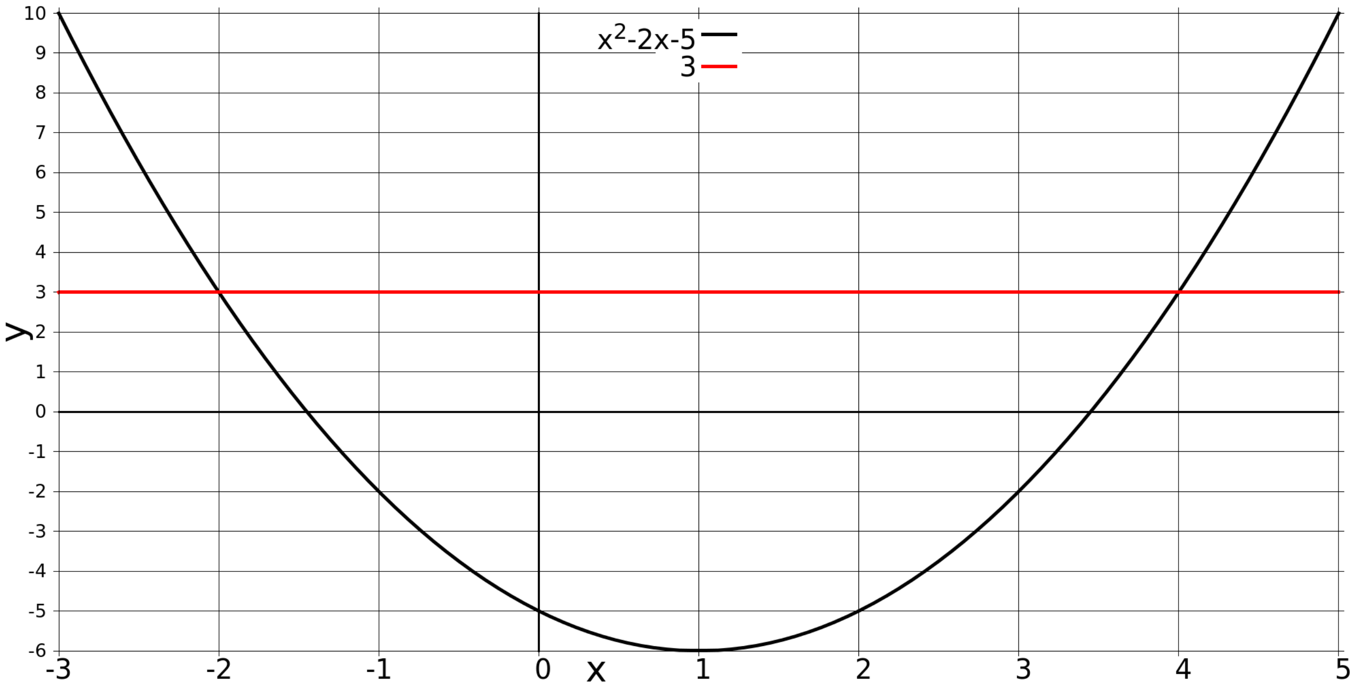
O desenvolvimento de todos os cálculos deve estar presente na prova.

Aproximações numéricas serão desconsideradas. Se achar necessário, argumente por escrito.

Nome: ______________________ *Assinatura:* ______________

1) Resolva as desigualdades e apresente a solução em termos de intervalos, se possível:

a. [1,0 ponto] $x^2 - 2x - 5 > 3$.
Solução:

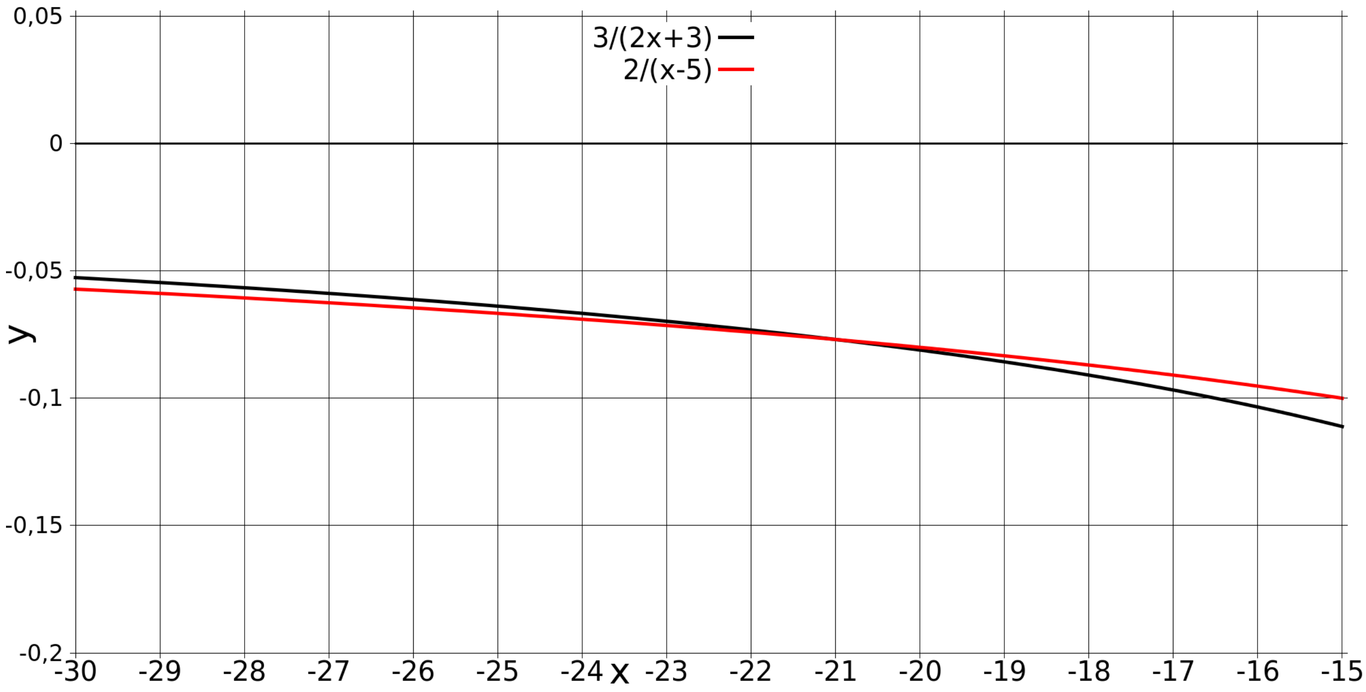


$$\begin{aligned} x^2 - 2x - \mathbf{5} &> \mathbf{3} && \text{– subtrair 3 de ambos os lados,} \\ x^2 - 2x - 8 &> 0 && \text{– fatorar o lado esquerdo da inequação,} \\ (x+2)(x-4) &> 0 && \text{– escrever em termos das raízes,} \\ \big(x - (-\mathbf{2})\big)\big(x - (\mathbf{4})\big) &> 0 && \text{– raízes: } x = -2 \text{ e } x = 4. \end{aligned}$$

Como a termo quadrático é positivo, a parábola tem concavidade voltada para cima. Assim, temos que $\big(x-(-2)\big)\big(x-(4)\big) > 0$ para valores de x menores que -2 (quando ambos os termos entre parênteses são negativos) ou para valores de x maiores que 4 (quando ambos os termos entre parênteses são positivos). Temos como conjunto solução $\underline{\mathbf{S} = (-\infty, -\mathbf{2}) \cup (\mathbf{4}, \infty)}$.

b. [1,0 ponto] $\dfrac{3}{2x+3} \leq \dfrac{2}{x-5}$.

Solução: Devemos analisar quatro casos:



1. $2x+3>0$ e $x-5>0$:

$$2x+3>0 \Rightarrow 2x>-3 \Rightarrow x>-\frac{3}{2} \quad \text{e} \quad x-5>0 \Rightarrow x>5. \tag{1}$$

Das duas restrições, consideraremos válidas as soluções presentes em $(5,\infty)$. Como ambos os denominadores são maiores que zero, a desigualdade não inverte quando multiplicamos estes denominadores em ambos os lados:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2x+3} &\leq \frac{2}{x-5} \quad \text{– multiplicar } (2x+3) \text{ e } (x-5) \text{ em ambos os lados,}\\
3(x-5) &\leq 2(2x+3) \quad \text{– usar distributividade,}\\
3x-15 &\leq 4x+6 \quad \text{– somar } (-3x) \text{ e } (-6) \text{ em ambos os lados,}\\
-15-6 &\leq x \quad \text{– resolver a soma,}\\
-21 &\leq x \quad \text{– ou, invertendo a ordem dos termos,}\\
x &\geq -21.
\end{aligned} \tag{2}$$

Da intersecção das restrições (1) com a solução (2), obtemos a solução do caso 1: $\underline{\mathbf{S_i} = (\mathbf{5}, \infty)}$.

2. $2x + 3 > 0$ e $x - 5 < 0$:

$$2x + 3 > 0 \Rightarrow 2x > -3 \Rightarrow x > -\frac{3}{2} \quad \text{e} \quad x - 5 < 0 \Rightarrow x < 5. \tag{3}$$

Das duas restrições, consideraremos válidas as soluções presentes em $\left(-\frac{3}{2}, 5\right)$. Como um dos denominadores é menor que zero, a desigualdade inverte quando multiplicamos estes denominadores em ambos os lados:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2x+3} &\leq \frac{2}{\mathbf{x-5}} \quad \text{– multiplicar } (2x+3) \text{ e } (x-5) \text{ em ambos os lados,} \\
3(x-5) &\geq 2(2x+3) \quad \text{– usar distributividade,} \\
3x - 15 &\geq 4x + 6 \quad \text{– somar } -3x \text{ e } -6 \text{ em ambos os lados,} \\
-15 - 6 &\geq x \quad \text{– resolver a soma,} \\
-21 &\geq x \quad \text{– ou, invertendo a ordem dos termos, temos} \\
x &\leq -21. \qquad (4)
\end{aligned}$$

Da intersecção das restrições (3) com a solução (4), obtemos a solução do caso 2: $\underline{\mathbf{S_{ii}} = \emptyset}$.

3. $2x + 3 < 0$ e $x - 5 > 0$:

$$2x + 3 < 0 \Rightarrow 2x < -3 \Rightarrow x < -\frac{3}{2} \quad \text{e} \quad x - 5 > 0 \Rightarrow x > 5. \tag{5}$$

Neste caso, não é necessário avaliar a solução da desigualdade, pois não existe número que seja, ao mesmo tempo, menor que $-\frac{3}{2}$ e maior que 5. Assim, a solução para este caso é vazia, $\underline{\mathbf{S_{iii}} = \emptyset}$.

4. $2x + 3 < 0$ e $x - 5 < 0$:

$$2x + 3 < 0 \Rightarrow 2x < -3 \Rightarrow x < -\frac{3}{2} \quad \text{e} \quad x - 5 < 0 \Rightarrow x < 5. \tag{6}$$

Das duas restrições, consideraremos válidas as soluções presentes em $\left(\infty, -\frac{3}{2}\right)$. Como ambos os denominadores são menores que zero, a desigualdade não inverte quando multiplicamos ambos os lados pelos denominadores (um denominador menor que zero inverte a desigualdade e o outro denominador menor que zero inverte, novamente, a desigualdade, deixando-a igual à original):

$$\begin{aligned}
\frac{3}{\mathbf{2x+3}} &\leq \frac{2}{\mathbf{x-5}} \quad \text{– multiplicar } (2x+3) \text{ e } (x-5) \text{ em ambos os lados,} \\
3(x-5) &\leq 2(2x+3) \quad \text{– usar distributividade,} \\
3x - 15 &\leq 4x + 6 \quad \text{– somar } (-3x) \text{ e } (-6) \text{ em ambos os lados,} \\
-15 - 6 &\leq x \quad \text{– resolver a soma,} \\
-21 &\leq x \quad \text{– ou, invertendo a ordem dos termos,} \\
x &\geq -21. \qquad (7)
\end{aligned}$$

Da intersecção das restrições (6) com a solução (7), obtemos a solução do caso 4: $\underline{\mathbf{S_{iv}} = \left[\mathbf{-21}, -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right)}$.

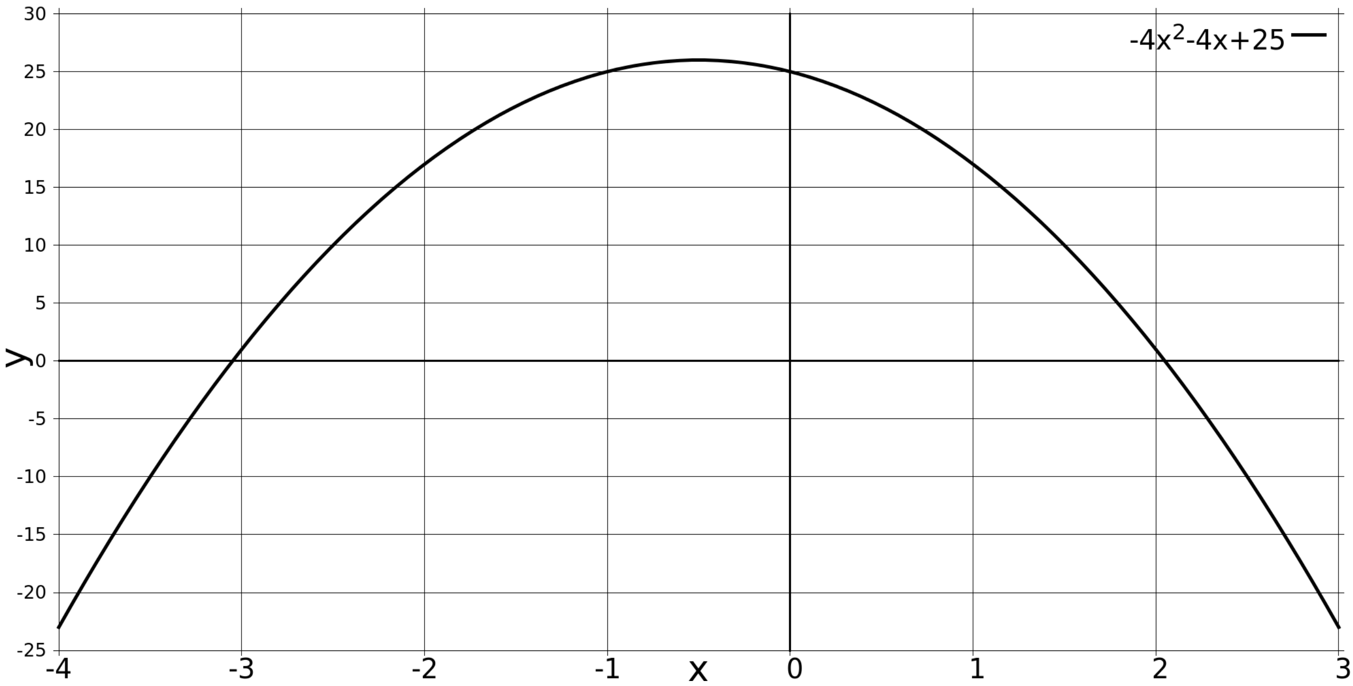
A solução final é a união das soluções de cada caso: $\underline{\mathbf{S}} = S_i \cup S_{ii} \cup S_{iii} \cup S_{iv} = \underline{\left[\mathbf{-21}, -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right) \cup (\mathbf{5}, \infty)}$.

2) Considere as funções $f(x) = -2x^2 - 2x + 12$ e $g(x) = \sqrt{2x+1}$. Determine:

a. [1,0 ponto] A expressão e o domínio da função $h(x) = g \circ f(x)$.
Solução:

$$\begin{aligned} \mathbf{h(x)} = g \circ f(x) &= g\big(f(x)\big) = \sqrt{2f(x)+1} = \sqrt{2\,(-2x^2 - 2x + 12) + 1} \\ &= \sqrt{(-4x^2 - 4x + 24) + 1} = \sqrt{\mathbf{-4x^2 - 4x + 25}}. \end{aligned}$$

O domínio de $h(x)$ são o valores de x que deixam o argumento da função raiz quadrada não-negativos, ou



seja, $-4x^2 - 4x + 13 \geq 0$. Assim, determinamos as raízes do argumento da raiz quadrada:

$$\begin{aligned} x^{',''} &= \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\,(-4)\,25}}{2\,(-4)} = \frac{4 \pm \sqrt{416}}{-8} = \frac{4 \pm 4\sqrt{26}}{-8}, \\ x^{'} &= \frac{4 + 4\sqrt{26}}{-8} = -\frac{1+\sqrt{26}}{2}, \quad x^{''} = \frac{4 - 4\sqrt{26}}{-8} = -\frac{1-\sqrt{26}}{2} = \frac{\sqrt{26}-1}{2}. \end{aligned} \tag{8}$$

Como a parábola tem concavidade voltada para baixo, pois o sinal do termo quadrático é negativo, interessam-nos os valores que deixam a função do segundo grau maiores ou iguais a zero, ou seja, os valores entre as raízes $x^{'}$ e $x^{''}$ acima. Assim, $\underline{\mathbf{Dom(h)} = \left[-\mathbf{\frac{1+\sqrt{26}}{2}}, \mathbf{\frac{\sqrt{26}-1}{2}}\right]}$.

b. [1,0 ponto] A expressão e o domínio da função $j(x) = f(x) + g(x)$.
Solução:

$$\underline{\mathbf{j(x)}} = f(x) + g(x) = \underline{\mathbf{-2x^2 - 2x + 12 + \sqrt{2x+1}}}, \tag{9}$$

cuja restrição reside no argumento da função raiz quadrada, que deve ser não-negativo, visto que o domínio de toda função polinomial (equação de segundo grau) é o conjunto $\mathbb{R}$. Assim temos:

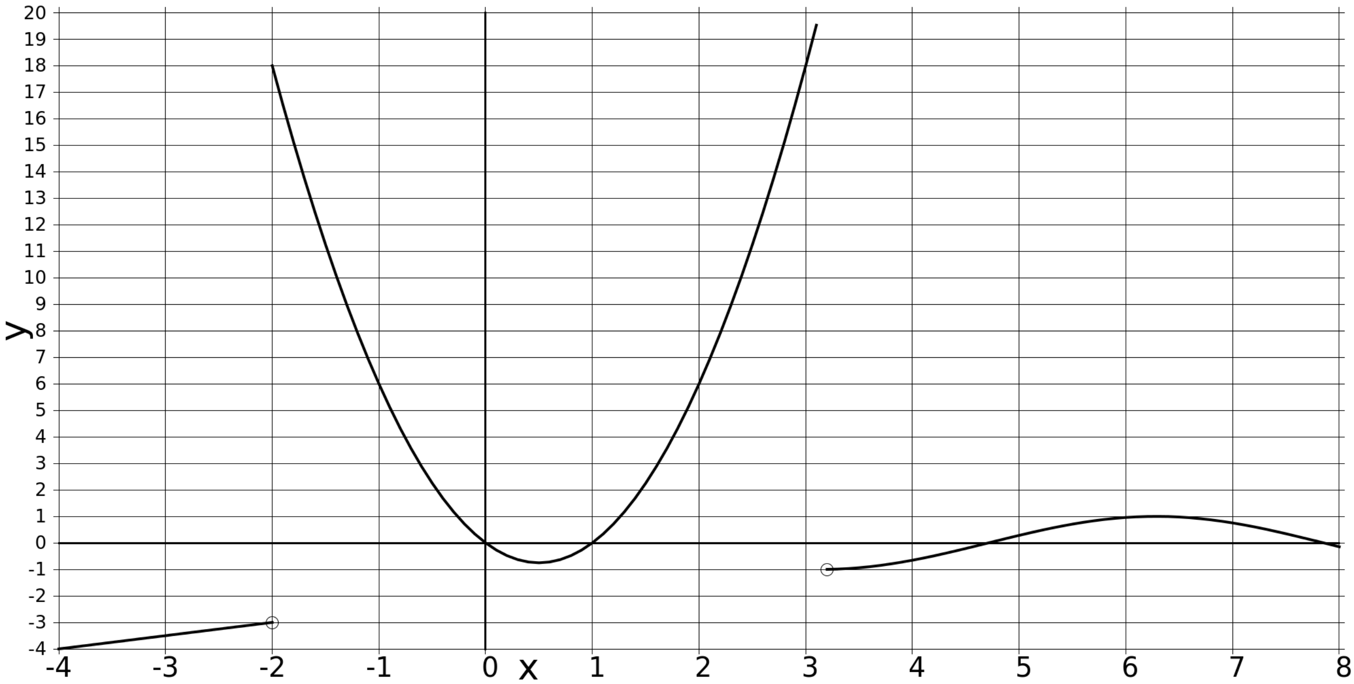
$$\begin{aligned} 2x + 1 &\geq 0 \quad \text{– somar (-1) em ambos os lados,} \\ 2x &\geq -1 \quad \text{– multiplicar } \left(\frac{1}{2}\right) \text{ em ambos os lados,} \\ x &\geq -\frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{10}$$

Assim, da interseção do conjunto $\mathbb{R}$ com a restrição (10), temos: $\underline{\mathbf{Dom(j)}=\left[-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\infty\right)}$.

3) [2,0 pontos] Faça o esboço do gráfico da função $m(x)$ abaixo, indicando todos os pontos relevantes para a análise gráfica. Use a aproximação $\pi \approx \sqrt{10}$.

$$m(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} - 2, & x < -2, \\ 3x^2 - 3x, & -2 \leq x \leq \pi, \\ \cos(x), & x > \pi. \end{cases}$$

Solução:



4) Determine o conjunto solução das expressões abaixo:

a. [1,0 ponto] $2x^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^{-3/2} = -\log_2 4.$

Solução:

$$\begin{aligned}
2x^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^{-3/2} &= -\log_{\mathbf{2}} \mathbf{4} \quad \text{– 2 elevado a quanto é 4?} \\
2x^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^{\mathbf{-3/2}} &= -2 \quad \text{– o “–” inverte o número, 2 é raiz quadrada e 3 é elevado ao cubo,} \\
2x^2 - \left(\sqrt{\mathbf{4}}\right)^{\mathbf{3}} &= -2 \quad \text{– aplicado o “–” do exponte, e obter a raiz de 4,} \\
2x^2 - (\mathbf{2})^{\mathbf{3}} &= -2 \quad \text{– elevar 2 ao cubo,} \\
2x^2 - \mathbf{8} + \mathbf{2} &= 0 \quad \text{– somar 8 e } -2, \\
2x^2 - 6 &= 0 \quad \text{– somar } -6 \text{ de ambos os lados,} \\
2x^2 &= 6 \quad \text{– multiplicar por } \frac{1}{2} \text{ de ambos os lados,} \\
x^2 &= \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{2}} \quad \text{– extrair a raiz quadrada de ambos os lados, e dividir o lado direto,} \\
\sqrt{\mathbf{x^2}} &= \sqrt{3} \quad \text{– a raiz quadrada do quadrado é o módulo,} \\
|x| &= \sqrt{3} \Rightarrow \underline{\mathbf{x} = \pm\sqrt{\mathbf{3}}}.
\end{aligned}$$

Assim, o conjunto solução é: $\underline{\mathbf{S} = \{-\sqrt{\mathbf{3}}, \sqrt{\mathbf{3}}\}}$.

b. [1,0 ponto] $x + 1 - |x - 4| + |5 - x| = 0$.
Solução: Devemos analisar quatro casos:

1. $x - 4 \geq 0$ e $5 - x \geq 0$:

$$x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \quad \text{e} \quad 5 - x \geq 0 \Rightarrow 5 \geq x \Rightarrow x \leq 5. \tag{11}$$

Como ambos os termos são maiores ou iguais a zero, basta tirar as barras do módulo e resolver a equação:

$$\begin{aligned}
x + 1 - |\mathbf{x} - \mathbf{4}| + |\mathbf{5} - \mathbf{x}| &= 0 \quad \text{– tirar as barras do módulo,} \\
x + 1 - (\mathbf{x} - \mathbf{4}) + (5 - x) &= 0 \quad \text{– cuidar com os sinais negativos,} \\
\mathbf{x} + 1 - \mathbf{x} + 4 + 5 - \mathbf{x} &= 0 \quad \text{– somar números e incógnitas,} \\
-x + 10 &= 0 \quad \text{– somar } x \text{ em ambos os lados,} \\
10 &= x. \qquad (12)
\end{aligned}$$

Da intersecção das restrições (11) com a solução (12), a solução deste caso é vazia: $\underline{\mathbf{S_i} = \emptyset}$.

2. $x - 4 \geq 0$ e $5 - x < 0$:

$$x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \quad \text{e} \quad 5 - x < 0 \Rightarrow 5 < x \Rightarrow x > 5. \tag{13}$$

Como o argumento do segundo módulo é menor que zero, trocamos seu sinal para resolver a equação:

$$\begin{aligned}
x + 1 - |\mathbf{x} - \mathbf{4}| + |\mathbf{5} - \mathbf{x}| &= 0 \quad \text{– tirar as barras do módulo,} \\
x + 1 - (x - 4) + (-\mathbf{5} + \mathbf{x}) &= 0 \quad \text{– trocar o sinal do argumento do segundo módulo,} \\
\mathbf{x} + 1 - \mathbf{x} + 4 - 5 + \mathbf{x} &= 0 \quad \text{– somar números e incógnitas,} \\
x + 0 &= 0 \Rightarrow x = 0. \qquad (14)
\end{aligned}$$

Da intersecção das restrições (13) com a solução (14), a solução deste caso é vazia: $\underline{\mathbf{S_{ii}} = \emptyset}$.

3. $x - 4 < 0$ e $5 - x \geq 0$:

$$x - 4 < 0 \Rightarrow x < 4 \quad \text{e} \quad 5 - x \geq 0 \Rightarrow 5 \geq x \Rightarrow x \leq 5. \tag{15}$$

Como o argumento do primeiro módulo é menor que zero, trocamos seu sinal para resolver a equação:

$$\begin{aligned}
x + 1 - |\mathbf{x} - \mathbf{4}| + |\mathbf{5} - \mathbf{x}| &= 0 \quad \text{– tirar as barras do módulo,} \\
x + 1 - (-\mathbf{x} + \mathbf{4}) + (5 - x) &= 0 \quad \text{– trocar o sinal do argumento do primeiro módulo,} \\
\mathbf{x} + 1 + \mathbf{x} - 4 + 5 - \mathbf{x} &= 0 \quad \text{– somar números e incógnitas,} \\
x + 2 &= 0 \quad \text{– somar } -2 \text{ em ambos os lados,} \\
x &= -2. \qquad (16)
\end{aligned}$$

Da intersecção das restrições (15) com a solução (16), a solução deste caso é: $\underline{\mathbf{S_{iii}} = \{-\mathbf{2}\}}$.

4. $x - 4 < 0$ e $5 - x < 0$:

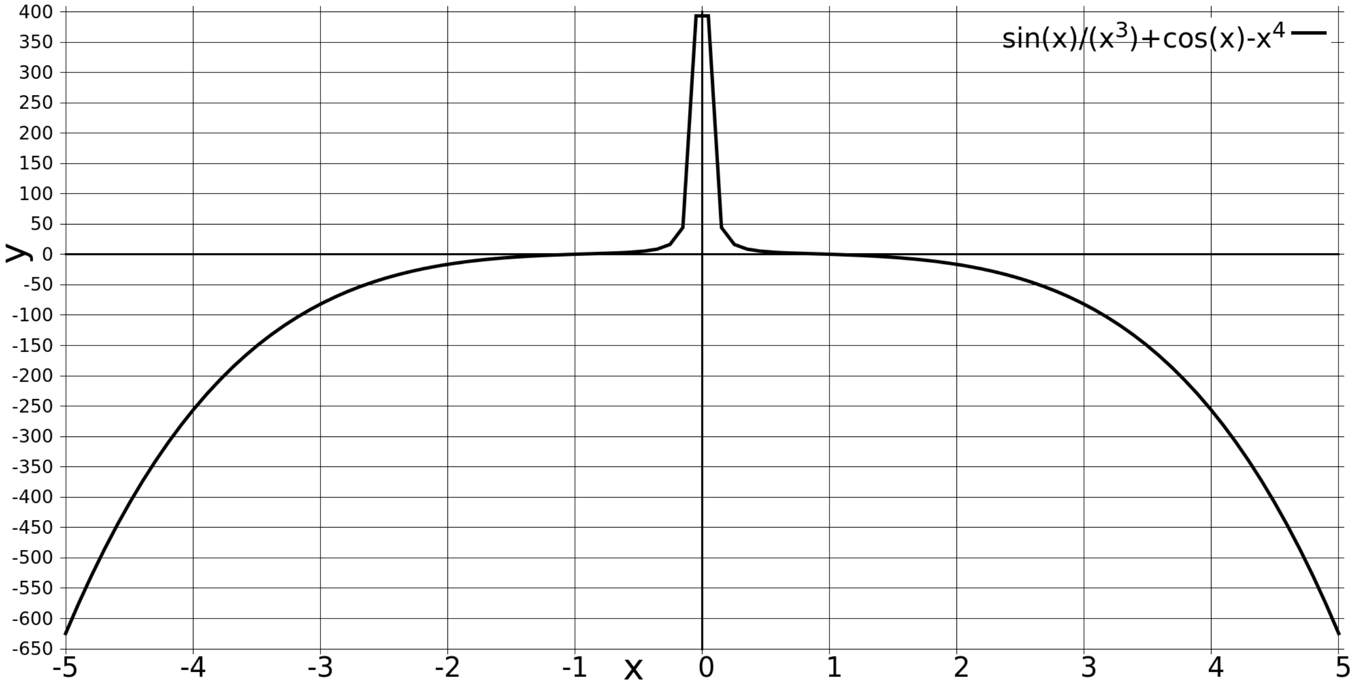
$$x - 4 < 0 \Rightarrow x < 4 \quad \text{e} \quad 5 - x < 0 \Rightarrow 5 < x \Rightarrow x > 5. \tag{17}$$

Não é necessário resolver este caso, pois não há número que seja, ao mesmo tempo, menor que 4 e maior que 5. Assim, da intersecção das restrições (17) a solução deste caso é vazia: $\underline{\mathbf{S_{iv}} = \emptyset}$.

A solução final é a união das soluções de cada caso: $\underline{\mathbf{S}} = S_i \cup S_{ii} \cup S_{iii} \cup S_{iv} = \underline{\{-\mathbf{2}\}}$.

5) Identifique a paridade de cada uma das funções abaixo (apresente o desenvolvimento ou argumente):

a. [1,0 ponto] $p(x) = \dfrac{\sin(x)}{x^3} + \cos(x) - x^4$.
Solução:



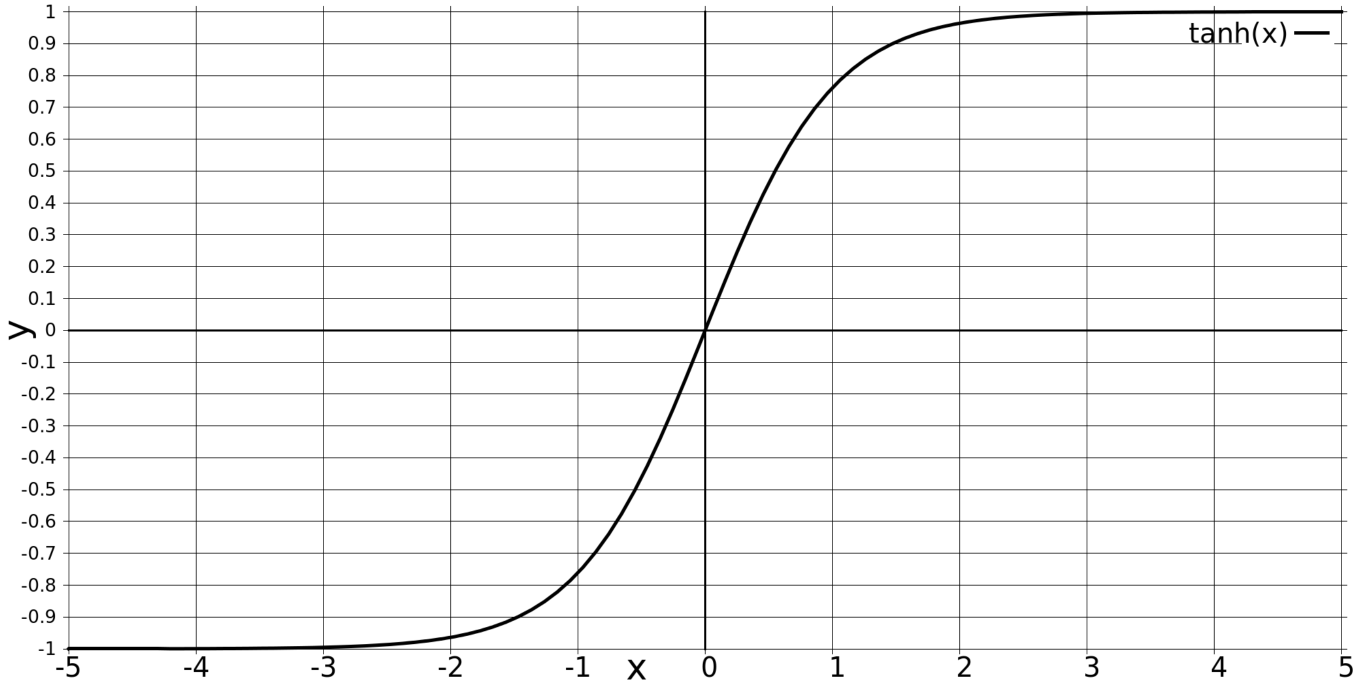
$$\begin{aligned}
p(-x) &= \frac{\sin(-x)}{(-x)^3} + \cos(-x) - (-x)^4 \quad \text{– avaliar a função em } -x,\\
p(-x) &= \frac{-\sin(\mathbf{x})}{-(\mathbf{x})^{\mathbf{3}}} + \cos(x) - (x)^4 \quad \text{– são ímpares: } \sin(x) \text{ e } x^3\text{; são pares: } \cos(x) \text{ e } x^4,\\
\mathbf{p}(-\mathbf{x}) &= \frac{\sin(x)}{(x)^3} + \cos(x) - (x)^4 = \mathbf{p}(\mathbf{x}),
\end{aligned}$$

logo, $\underline{p(x)}$ **é função par**.

b. [1,0 ponto] $q(x) = \tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$, com $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ e $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.
Solução:

$$\begin{aligned}
q(-x) &= \tanh(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = \frac{\frac{e^{(-x)}+e^{-(-x)}}{2}}{\frac{e^{(-x)}-e^{-(-x)}}{2}} \quad \text{– definição das funções e simplificação por 2,}\\
q(-x) &= \frac{e^{(-x)} + e^{-(-x)}}{e^{(-x)} - e^{-(-x)}} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{e^{-x} - e^{x}} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{-(-e^{-x} + e^{x})} \quad \text{– multiplicar numerador e denominador por } \frac{1}{2},\\
\mathbf{q}(-\mathbf{x}) &= \frac{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}{-\frac{(-e^{-x}+e^{x})}{2}} = \frac{\cosh(x)}{-\sinh(x)} = -\frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = -\mathbf{q}(\mathbf{x}),
\end{aligned}$$

logo, $\underline{q(x)}$ **é função ímpar**.


tanh(x)
y
x
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.5
-0.6
-0.7
-0.8
-0.9
-1
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5