UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS - CCT
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
ANTÔNIO JOÃO FIDÉLIS

CÁLCULO DIF. E INT. I (CDI-I) PROVA I 20/03/2013 TURMA C

É **proibido** o uso de **telefone celular, smartphones, tablets** (que devem permanecer **desligados** durante a prova) ou **calculadoras programáveis**, assim como o empréstimo de materiais durante a prova. Só é permitido o uso de calculadora científica comum.

Não é permitido ao aluno sair da sala antes da entrega desta prova.

O desenvolvimento de todos os cálculos deve estar presente na prova.

Aproximações numéricas serão desconsideradas. Se achar necessário, argumente por escrito.

Nome: ______________________ *Assinatura:* ______________

1) Resolva as desigualdades e apresente a solução em termos de intervalos, quando possível:

a. [1,0 ponto] $-4x^2 - 4x + 27 > 3$.
Solução:

$$\begin{aligned}
-4x^2 - 4x + \mathbf{27} &> \mathbf{3} && \text{– subtrair 3 de ambos os lados,}\\
-4x^2 - 4x + 24 &> 0 && \text{– fatorar o lado esquerdo da inequação,}\\
-4(x-2)(x+3) &> 0 && \text{– escrever em termos das raízes,}\\
-4\big(x-\mathbf{2}\big)\big(x-(-\mathbf{3})\big) &> 0 && \text{– raízes: } 2 \text{ e } -3.
\end{aligned}$$

Como o termo quadrático é negativo, a concavidade está voltada para baixo. Assim, temos que $-4(x-2)(x+3) > 0$ para valores de x que são estritamente maiores que -3 e menores que 2 (situação em que os termos entre parênteses tem sinais contrários). Temos como conjunto solução $\underline{\mathbf{S} = (-\mathbf{3}, \mathbf{2})}$.

b. [1,0 ponto] $\dfrac{4x-1}{2x} \geq \dfrac{2x+1}{x+2}$.
Solução: Temos de separar em quatro casos:

1. $2x > 0$ e $x + 2 > 0$:
$$2x > 0 \Rightarrow x > 0 \quad \text{e} \quad x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2. \tag{1}$$
Das duas restrições, consideraremos válidas as soluções presentes em $(0, \infty)$. Como ambos os denominadores são maiores que zero, a desigualdade não inverte quando multiplicamos os denominadores em ambos os lados:
$$\begin{aligned}
\frac{4x-1}{\mathbf{2x}} &\geq \frac{2x+1}{\mathbf{x+2}} && \text{– multiplicar } (2x) \text{ e } (x+2) \text{ em ambos os lados,}\\
(4x-1)(x+2) &\geq (2x+1)(2x) && \text{– usar distributividade,}\\
4x^2 + 8x - x - 2 &\geq 4x^2 + 2x && \text{– somar } (-4x^2), (-2x) \text{ e } (2) \text{ em ambos os lados,}\\
\mathbf{5}x &\geq 2 && \text{– multiplicar } \left(\frac{1}{5}\right) \text{ em ambos os lados,}\\
x &\geq \frac{2}{5}. && (2)
\end{aligned}$$
Da intersecção das restrições (1) com a solução (2), obtemos a solução do caso 1: $\underline{\mathbf{S_i} = \left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}, \infty\right)}$.

2. $2x > 0$ e $x + 2 < 0$:
$$2x > 0 \Rightarrow x > 0 \quad \text{e} \quad x + 2 < 0 \Rightarrow x < -2. \tag{3}$$

Neste caso, não é necessário avaliar a solução da desigualdade, pois não exsite número que seja, ao mesmo tempo, menor que -2 e maior que 0. Assim, a solução para o caso 2 é vazia, $\underline{\mathbf{S_{ii}} = \emptyset}$.

3. $2x < 0$ e $x + 2 > 0$:

$$2x < 0 \Rightarrow x < 0 \quad \text{e} \quad x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2. \tag{4}$$

Das duas restrições, consideraremos válidas as soluções presentes em $(-2, 0)$. Como um dos denominadores é menor que zero, a desigualdade inverte quando multiplicamos os denominadores em ambos os lados:

$$\begin{aligned}
\frac{4x-1}{\mathbf{2x}} &\geq \frac{2x+1}{\mathbf{x+2}} \quad \text{– multiplicar } (2x) \text{ e } (x+2) \text{ em ambos os lados,}\\
(4x-1)(x+2) &\leq (2x+1)(2x) \quad \text{– usar distributividade,}\\
4x^2 + 8x - x - 2 &\leq 4x^2 + 2x \quad \text{– somar } (-4x^2), (-2x) \text{ e } (2) \text{ em ambos os lados,}\\
\mathbf{5}x &\leq 2 \quad \text{– multiplicar } \left(\frac{1}{5}\right) \text{ em ambos os lados,}\\
x &\leq \frac{2}{5}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Da intersecção das restrições (4) com a solução (5), obtemos a solução do caso 3: $\underline{\mathbf{S_{iii}} = (\mathbf{-2, 0})}$.

4. $2x < 0$ e $x + 2 < 0$:

$$2x < 0 \Rightarrow x < 0 \quad \text{e} \quad x + 2 < 0 \Rightarrow x < -2. \tag{6}$$

Das duas restrições, consideraremos válidas as soluções presentes em $(\infty, -2)$. Como ambos os denominadores são menores que zero, a desigualdade não inverte quando multiplicamos ambos os lados pelos denominadores (um termo menor que zero inverte a desigualdade e o outro termo menor que zero inverte, novamente, a desigualdade, deixando-a igual à original):

$$\begin{aligned}
\frac{4x-1}{\mathbf{2x}} &\geq \frac{2x+1}{\mathbf{x+2}} \quad \text{– multiplicar } (2x) \text{ e } (x+2) \text{ em ambos os lados,}\\
(4x-1)(x+2) &\geq (2x+1)(2x) \quad \text{– usar distributividade,}\\
4x^2 + 8x - x - 2 &\geq 4x^2 + 2x \quad \text{– somar } (-4x^2), (-2x) \text{ e } (2) \text{ em ambos os lados,}\\
\mathbf{5}x &\geq 2 \quad \text{– multiplicar } \left(\frac{1}{5}\right) \text{ em ambos os lados,}\\
x &\geq \frac{2}{5}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Da intersecção das restrições (6) com a solução (7), obtemos uma solução vazia para o caso 4: $\underline{\mathbf{S_{iv}} = \emptyset}$.

A solução final é a união das soluções de cada caso: $S_i \cup S_{ii} \cup S_{iii} \cup S_{iv} = \underline{(\mathbf{-2, 0}) \cup \left(\mathbf{\frac{2}{5}}, \infty\right)}$.

2) Considere as funções $f(x) = -2x + 5$ e $g(x) = 4\log_3(x)$. Determine:

a. [1,0 ponto] A expressão e o domínio da função $h(x) = g \circ f(x)$.
Solução:

$$\mathbf{h(x)} = g \circ f(x) = 4\log_3(f(x)) = \mathbf{4}\log_{\mathbf{3}}(\mathbf{-2x + 5}). \tag{8}$$

O domínio da função $h(x)$ existe para valores do argumento da função logarítmica estritamente maiores que zero, ou seja, quando $-2x + 5 > 0$. Assim temos:

$$-2x + 5 > 0 \Rightarrow -2x > -5 \Rightarrow x < \frac{5}{2}. \tag{9}$$

Ou seja, $\underline{\mathbf{Dom}(\mathbf{h}) = \left(-\infty, \mathbf{\frac{5}{2}}\right)}$.

b. [1,0 ponto] Determine a inversa da função $h(x)$ e seus conjuntos domínio e imagem.
Solução: Para determinar $h^{-1}(x)$, fazemos $h(x) = y$ e trocamos x por y, y por x e isolamos y.

$$\begin{aligned}
x &= \mathbf{4}\log_3(-2y+5) \quad \text{– multiplicar } \frac{1}{4} \text{ em ambos os lados,}\\
\frac{x}{4} &= \log_{\mathbf{3}}(-2y+5) \quad \text{– tornar cada lado expoente de 3,}\\
3^{\frac{x}{4}} &= 3^{\log_3(-2y+5)} = -2y+5 \quad \text{– somar } -5 \text{ de ambos os lados,}\\
3^{\frac{x}{4}} - 5 &= -2y \quad \text{– multiplicar } -\frac{1}{2} \text{ de ambos os lados,}\\
-\frac{3^{\frac{x}{4}}}{2} + \frac{5}{2} &= y = -\frac{\left(\sqrt[4]{3}\right)^x}{2} + \frac{5}{2}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Assim, $\underline{\mathbf{h^{-1}(x)} = -\frac{\mathbf{3^{\frac{x}{4}}}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}}$. Como trata-se de uma função exponencial, seu domínio é o conjunto dos Reais, ou seja, $\underline{\mathbf{Dom}(\mathbf{h^{-1}}) = \mathbb{R}}$. A imagem de $h^{-1}(x)$ é o domínio de $h(x)$, ou seja, $\underline{\mathbf{Im}(\mathbf{h^{-1}}) = \left(-\infty, \mathbf{\frac{5}{2}}\right)}$.

3) [2,0 pontos] Faça o esboço do gráfico da função $m(x)$ abaixo, indicando todos os pontos relevantes para a análise gráfica. Use a aproximação $\pi \approx \sqrt{10}$.

$$m(x) = \begin{cases} 3\sin(x), & x < -\pi, \\ -2x^2 - 1, & -\pi \leq x \leq 3, \\ \frac{x}{3} - 5, & x > 3. \end{cases}$$

4) Determine o conjunto solução das expressões abaixo:

a. [1,0 ponto] $-3x^2 + 9\left[\left(\frac{8}{9} + 8\right) + (27)^{-2/3}\right]^{-1/2} = -\log_3(9 \cdot 3)$.

Solução:

$$
\begin{aligned}
-3x^2+9\left[\left(\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{9}}+\mathbf{8}\right)+(27)^{-2/3}\right]^{-1/2} &= -\log_3(\mathbf{9}\cdot\mathbf{3}) \quad \text{– resolver os termos em parênteses ,}\\
-3x^2+9\left[\left(\frac{8}{9}+8\left(\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{9}}\right)\right)+(27)^{-2/3}\right]^{-1/2} &= -\log_3(27) \quad \text{– resolver o termo em parênteses do lado esquerdo,}\\
-3x^2+9\left[\left(\frac{\mathbf{8+72}}{\mathbf{9}}\right)+(27)^{-2/3}\right]^{-1/2} &= -\log_{\mathbf{3}}(\mathbf{27}) \quad \text{– resolver o log e o termo entre parênteses,}\\
-3x^2+9\left[\left(\frac{80}{9}\right)+(\mathbf{27})^{\mathbf{-2/3}}\right]^{-1/2} &= -3 \quad \text{– transformar a potência fracionária em raiz,}\\
-3x^2+9\left[\left(\frac{80}{9}\right)+\left(\sqrt[3]{\mathbf{27}}\right)^{\mathbf{-2}}\right]^{-1/2} &= -3 \quad \text{– resolver a raiz,}\\
-3x^2+9\left[\left(\frac{80}{9}\right)+(\mathbf{3})^{\mathbf{-2}}\right]^{-1/2} &= -3 \quad \text{– resolver a potência negativa,}\\
-3x^2+9\left[\left(\frac{80}{9}\right)+\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)^{\mathbf{2}}\right]^{-1/2} &= -3 \quad \text{– resolver a potência 2,}\\
-3x^2+9\left[\left(\frac{\mathbf{80}}{\mathbf{9}}\right)+\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}\right)\right]^{-1/2} &= -3 \quad \text{– resolver o termo entre colchetes,}\\
-3x^2+9\left[\left(\frac{\mathbf{80+1}}{\mathbf{9}}\right)\right]^{-1/2} &= -3 \quad \text{– resolver o termo entre parênteses,}\\
-3x^2+9\left[\left(\frac{\mathbf{81}}{\mathbf{9}}\right)\right]^{-1/2} &= -3 \quad \text{– resolver o termo entre parênteses,}\\
-3x^2+9\,[\mathbf{9}]^{-1/2} &= -3 \quad \text{– resolver o termo entre colchetes,}\\
-3x^2+\mathbf{9}\left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right] &= -3 \quad \text{– resolver o produto,}\\
-3x^2+\mathbf{3} &= -3 \quad \text{– somar -3 de ambos os lados,}\\
-\mathbf{3}x^2 &= -6 \quad \text{– multiplicar } -\frac{1}{3} \text{ de ambos os lados,}\\
x^2 &= 2 \quad \text{– aplicar a raiz quadrada em ambos os lados,}\\
\sqrt{x^2} &= \sqrt{2} \quad \text{– raiz quadrada do quadrado é o módulo,}\\
|x| &= \sqrt{2} \quad \text{– aplicar definição de módulo,}\\
x &= \pm\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

Solução: $\underline{\mathbf{S}=\left\{-\sqrt{\mathbf{2}},\sqrt{\mathbf{2}}\right\}}$.

b. [1,0 ponto] $2x+3-|2x-4|+|5-3x|=0$.

5) Determine a equação da reta que obedeça às condições dadas:

a. [1,0 ponto] Passe pelos pontos $A(-2,3)$ e $B(6,-1)$.

b. [1,0 ponto] Passe pelo ponto $P(5,3)$ e seja paralela à reta $y=\dfrac{2}{5}x-2$.

Função par: $f(x)=f(-x)$ Função ímpar: $f(x)=-f(-x)$ $x',''=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$ $y=mx+b$