Nome: ____

Proibido o uso de eletrônicos (exceto calculadora científica não programável) ou o empréstimo de materiais. Sobre a mesa somente lápis ou lapiseira, caneta, régua, borracha, calculadora e garrafa de água sem rótulo. Não é permitido sair da sala antes do término da avaliação, quando todo material recebido deve ser devolvido. O telefone celular deve ser colocado no chão, embaixo da cadeira, desligado, ou no silencioso, ou no modo avião. **O desenvolvimento de todos os cálculos, ou as justificativas (nas questões teóricas), deve estar presente na resposta**.

1. [2,0 pt] A Figura 1 mostra uma região delimitada do espaço que contém um campo magnético $\vec{B}$ uniforme e constante. Uma espira circular, de raio R e resistência r, movendo-se com velocidade constante $\vec{v}$, passa por cima desta região, entrando e saindo dela sem girar. Faça um gráfico mostrando a amplitude do módulo (e sentido) da corrente elétrica induzida neste espira em sua trajetória em função da posição, usando como referência o ponto P da espira, posicionado de $-2R$ a $+10R$. Considere o sentido anti-horário da corrente elétrica como positivo.

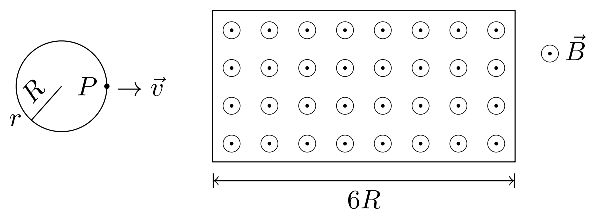

Figura 1: Espira de raio R movendo-se em direção a campo magnético $\vec{B}$ constante e uniforme.

Resposta:

Só há corrente induzida na espira quando há variação de fluxo magnético na mesma. Quando entra na região de campo magnético é induzida uma corrente no sentido horário, gerando campo magnético contrário ao do campo. Dentro da região de campo magnético, o fluxo não varia, logo não é induzida corrente. Ao sair da região de campo magnético, é induzida uma corrente no sentido anti-horário, tentando manter o fluxo que havia antes de sair.

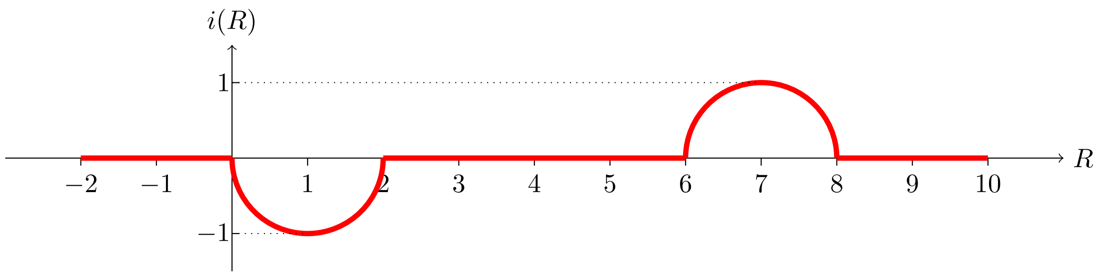

Figura 2: Corrente induzida em função da posição do ponto P na espira.

2. Considere um circuito RL no qual em $t = 0{,}0\,\mathrm{s}$ a corrente no indutor seja 20% da corrente máxima no circuito. Após 25,0 s a corrente no indutor passa a ser 60% da corrente máxima no circuito.

a) [1,0 pt] Determine numericamente a constante de tempo característico τ_L.
Resposta:
Como o indutor já está com 20% do corrente máxima, temos a corrente inicial, mais a corrente que falta crescendo de forma exponencial:

$$0{,}6\cancel{i_m} = 0{,}2\cancel{i_m} + 0{,}8\cancel{i_m}(1 - e^{-25{,}0\,\mathrm{s}/\tau_L}) \Rightarrow \frac{0{,}6 - 0{,}2}{0{,}8} = 1 - e^{-25{,}0\,\mathrm{s}/\tau_L} \Rightarrow \tau_L = \frac{-25{,}0\,\mathrm{s}}{\ln(0{,}5)} = \underline{36{,}1\,\mathrm{s}}.$$

b) [1,0 pt] Determine a nova contante de tempo τ_L' se dobrarmos o valor da resistência R, reduzirmos à metade a indutância L e triplicarmos o valor da tensão da fonte.

Reposta:

$$\tau'_L = \frac{L/2}{2R} = \frac{L}{4R} = \frac{\tau_L}{4} = 9{,}02\,\text{s}.$$

3. Considere a Figura 3 como sendo a corrente $i(t)$ fornecida a um circuito em função do tempo.

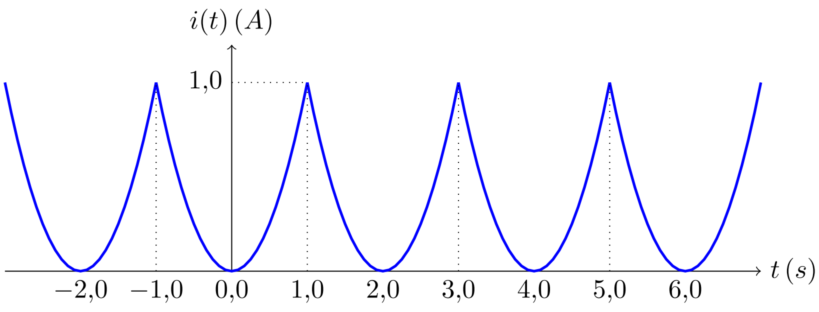

Figura 3: Corrente $i(t)$ em função do tempo.

a) [1,0 pt] Determine a expressão da função $i(t)$.
Resposta:
$i(t) = a(t - bn)^2, -1 + 2n \leq t < 1 + 2n, |a| = 1, [a] = \text{A/s}^2, |b| = 1, [b] = \text{s}, n \in \mathbb{Z}.$

b) [1,0 pt] Determine o valor da corrente i_{rms} para esta corrente.
Resposta:

Para $n = 0$ temos: $i_{\text{rms}} = \sqrt{\dfrac{1}{2{,}0\,\text{s}} \displaystyle\int_{-1{,}0\,\text{s}}^{1{,}0\,\text{s}} \left[1{,}0\,\frac{\text{A}}{\text{s}^2} t^2\right]^2 \text{d}t} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\text{A}.$

4. [2,0 pt] Considere o circuito representado na Figura 4. Inicialmente o capacitor C está descarregado, não há corrente no indutor L e a chave S está aberta. Determine a relação entre as grandezas R, L e C que garantem que a corrente i fornecida pela bateria atinja seu valor final $\mathcal{E}/R$ no instante em que a chave S é fechada, e este valor seja mantido constante para qualquer tempo.

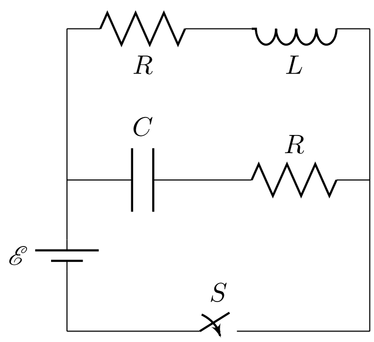

Figura 4: Circuito da Questão **4.**

Resposta:

Basta somar a corrente em cada ramo: no do capacitor há uma queda exponencial e na do indutor há um crescimento exponencial.

$$i = i_C + I_L = i(1 - e^{-t/\tau_C}) + ie^{-t/\tau_L}$$

$$\frac{\cancel{\mathcal{E}}}{\cancel{R}} = \frac{\cancel{\mathcal{E}}}{\cancel{R}}(1 - e^{t/\tau_C}) + \frac{\cancel{\mathcal{E}}}{\cancel{R}}e^{-t/\tau_L} \Rightarrow 1 = 1 - e^{t/\tau_C} + e^{t/\tau_L} \Rightarrow \tau_C = \tau_L \Rightarrow RC = \frac{L}{R} \Rightarrow R = \underline{\sqrt{\frac{L}{C}}}.$$

5. Considere um circuito RLC em corrente alternada com $R = 1{,}0\,\Omega$, $L = 1{,}0\,\mathrm{H}$ e $C = 1{,}0\,\mathrm{F}$.

a) [1,0 pt] Mostre que se este circuito é indutivo e fator de potência é $\cos(\phi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, então $\omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ rad/s, que é a razão áurea.

Resposta:

Como $\cos(\phi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \tan(\phi) = 1$. Assim, $1 = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{\omega 1{,}0\,\mathrm{H} - \frac{1}{\omega 1{,}0\,\mathrm{F}}}{1{,}0\,\Omega}$, ou seja, $1 = \omega - \frac{1}{\omega} \Rightarrow \omega = \omega^2 - 1 \Rightarrow \omega^2 - \omega - 1 = 0$, cujas soluções são: $\omega'{,}'' = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$rad/s, e a aceitável é a solução positiva, pois não há frequência negativa. Assim, $\omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$rad/s.

b) [1,0 pt] Determine para quais frequências ω o circuito torna-se capacitivo.

Resposta:

Para ser capacitivo, $X_L - X_C < 0$, ou seja, $\omega L - \frac{1}{\omega C} < 0 \Rightarrow \omega 1{,}0\,\mathrm{H} - \frac{1}{\omega 1{,}0\,\mathrm{F}} < 0 \Rightarrow \omega < \frac{1}{\omega} \Rightarrow \omega^2 < 1{,}0\,(\mathrm{rad/s})^2$, ou simplesmente, $\underline{\omega < 1{,}0\,\mathrm{rad/s}}$.

$\mathscr{E}_L = -L\frac{di}{dt}$ $\quad i(t) = \frac{\mathscr{E}}{R}\left(1 - e^{-t/\tau_L}\right)$ $\quad \tau_L = \frac{L}{R}$ $\quad i(t) = i_0 e^{-t/\tau_L}$ $\quad i(t) = i_0(1 - e^{-t/\tau_L})$ $\quad V_R = I_m R$

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $\quad q(t) = Qe^{-Rt/2L}\cos(\omega' t + \phi)$ $\quad \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - (R/2L)^2}$ $\quad V_C = I_m X_C$ $\quad X_C = \frac{1}{\omega C}$

$V_L = I_m X_L$ $\quad X_L = \omega L$ $\quad q = CV$ $\quad T = \frac{2\pi}{\omega}$ $\quad \mathscr{E}_m = I_m Z$ $\quad \cos(\phi) = \frac{R}{Z}$ $\quad Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$

$\tan(\phi) = \frac{X_L - X_C}{R}$ $\quad \mathscr{E}_L = -N\frac{d\Phi_B}{dt}$ $\quad \mathscr{E} = \mathscr{E}_m \sin(\omega t)$ $\quad I = I_m \sin(\omega t - \phi)$ $\quad q(t) = Q(1 - e^{-t/\tau_C})$

$q(t) = Qe^{-t/\tau_C}$ $\quad \Phi_B = \oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$ $\quad f_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int f^2(t)\mathrm{d}t}$, integrada no intervalo de repetição