Universidade do Estado de Santa Catarina
Centro de Ciências Tecnológicas - CCT
Departamento de Matemática
Antônio João Fidélis

Matemática Aplicada – MAP0001 PROVA I 03/03/2014 Turma A

É **proibido** o uso de **telefone celular, smartphones, tablets** (que devem permanecer **desligados** durante a prova) ou **calculadoras programáveis**, e o uso ou empréstimo de materiais durante a prova. É permitido o uso de calculadora científica comum. **Não é permitido sair da sala antes da entrega desta prova. O desenvolvimento de todos os cálculos deve estar presente na prova.**

Nome: ______________________ *Assinatura:* ______________

1) Considere $\mathcal{C}_1$ a curva obtida a partir do movimento do ponto $P(0,0)$ que está fixo sobre uma circunferência de raio r centrada em $C(0,r)$ quando esta gira sobre o eixo Ox sem deslizar. Esta curva é chamada de cicloide.

a. [**1,0 ponto**] Parametrize a cicloide $\mathcal{C}_1$ em termos do parâmetro a, conforme a Figura 1.

b. [**1,0 ponto**] Reparametrize $\mathcal{C}_1$ por comprimento de arco e determine o comprimento de uma cicloide.

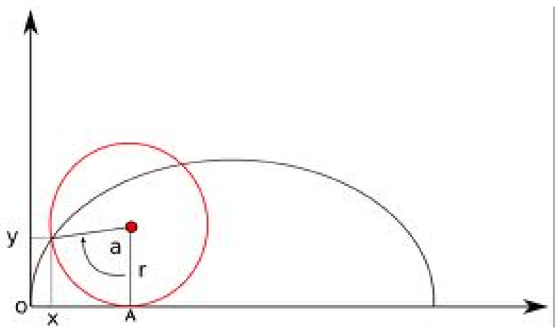

Figura 1: Cicloide de raio r e parâmetro a.

2) Considere a curva $\mathcal{C}_2 : \vec{r}(t) = (2\cos(t), -2\sin(t), 2t)$ e o ponto P cuja altura é $z = \frac{5\pi}{2}$.

a. [**1,0 ponto**] Determine as coordenadas do ponto P e a equação da reta tangente à curva $\mathcal{C}_2$ em P.

b. [**1,5 ponto**] Determine a curvatura e os vetores normal principal e binormal à curva $\mathcal{C}_2$ em P.

3) [**1,5 ponto**] A massa de um sólido é dada em *gramas* por $M(x,y,z) = \big(4+\cos(\pi x)+2xy+\ln(z)\big)$ com x, y e z em cm. No ponto $A(-1,-2,e^{-3})$, qual a taxa de variação máxima da massa por unidade de comprimento deste sólido? Em que direção ela ocorre?

4) [**1,5 ponto**] Dado $\vec{E}(x,y,z) = (xy+z, 2z-2x, 3yz-xz)$, determine todos os pontos do espaço em que este campo atua como fonte de linhas de campo.

5) [**2,5 pontos**] Dado $\vec{F} = (xy^2, yz^2, zx^2)$, determine o módulo da derivada direcional de $\vec{F}$ em $Q(1,-2,2)$ na direção do vetor $\nabla \times \vec{F}(Q)$.

$\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k},\ t \in [a,b]$ $\qquad \ell = \int_a^b \left|\vec{r}\,'(t)\right| dt$ $\qquad \vec{h}(s) = \vec{r}\big(t(s)\big),\ s \in [0,\ell]$ $\qquad \vec{u}(s) = \vec{h}\,'(s)$

$s(t) = \int_0^t \left|\vec{r}\,'(t^*)\right| dt^*$ $\qquad \vec{u}(t) = \dfrac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|}$ $\qquad k(s) = |\vec{u}\,'(s)| = \left|\vec{h}\,''(s)\right|$ $\qquad k(t) = \dfrac{|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)|}{|\vec{r}\,'|^3}$

$\vec{p}(s) = \dfrac{\vec{u}\,'(s)}{k(s)} = \dfrac{\vec{u}\,'(s)}{|\vec{u}\,'(s)|}$ $\qquad \vec{b}(s) = \vec{u}(s) \times \vec{p(s)}$ $\qquad \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos(2x) = \sin^2(x)$ $\qquad \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos(2x) = \cos^2(x)$

$\nabla f(x,y,z) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$ $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial s}(P) = \vec{b} \cdot \nabla f(P)$ $\qquad \vec{b} = \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ $\qquad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$\vec{f}(x,y,z) = f_1(x,y,z)\hat{\imath} + f_2(x,y,z)\hat{\jmath} + f_3(x,y,z)\hat{k}$ $\qquad \nabla \cdot \vec{f}(x,y,z) = \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \dfrac{\partial f_2}{\partial y} + \dfrac{\partial f_3}{\partial z}$

$$\nabla \times \vec{f}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \qquad \frac{\partial \vec{f}}{\partial S}(P) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(P) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(P) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(P) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(P) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(P) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(P) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(P) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(P) & \frac{\partial f_3}{\partial z}(P) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$