

É **proibido** o uso de **telefone celular, smartphones, tablets** (que devem permanecer **desligados** durante a prova) ou **calculadoras programáveis**, ou empréstimo de materiais durante a prova. É permitido o uso de calculadora científica comum. **Não é permitido sair da sala antes da entrega desta prova. O seu nome e desenvolvimento de todos os cálculos devem estar presentes na prova, na folha almaço.** Ao final, entregue todo o material recebido durante a prova. Esta folha pode ser usada como rascunho.

Nome: _____ Assinatura: _____

1) [2,0 pts] Os elétrons livres de um metal são atraídos pela força da gravidade da Terra. Então, por que eles não se acumulam na base de um condutor, tal como a sedimentação de partículas no fundo de um rio?

Resposta: Todas as partículas do condutor são atraídas pela força da gravidade. Se exclusivamente os elétrons livres fossem atraídos para baixo, pela gravidade, a repulsão eletrostática entre eles faria com que ficassem espalhados, o máximo possível, no condutor. Assim, o que de fato ocorre é que os elétrons ficam espalhados pela superfície externa do condutor devido à mútua repulsão eletrostática.

2) [3,0 pts] Três cargas pontuais idênticas, cada uma com massa $m = 0,100 \text{ kg}$, estão suspensas por três cordas e encontram-se em equilíbrio, como mostra a Figura 1. Se o comprimento das cordas da esquerda e da direita é de $L = 30,0 \text{ cm}$ e o ângulo $\theta = 45,0^\circ$, determine **a)** o valor de q e **b)** a quantidade da cargas elétricas positivas em excesso em cada carga. **c)** Faça o diagrama de corpo isolado das forças que atuam na carga da direita.

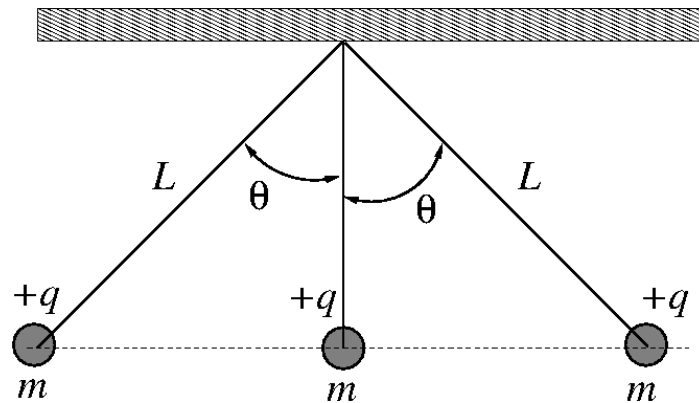


Figura 1: Questão 2.

Resolução: a) A distância da carga da direita à carga central é dada por

$$d = L \sin(\theta) = 30,0 \text{ cm} \sin(45,0^\circ). \quad (1)$$

A distância da carga da direita à carga da esquerda é $2d$. Analisando apenas a carga da direita, sem perda de generalidade, avaliando a Figura 2, temos que as forças que agem na horizontal são a força \vec{F}_{cd} – força que a carga do **centro** exerce na carga da **direita**, que age para a direita –, a força \vec{F}_{ed} – força que a carga da **esquerda** exerce na carga da **direita**, que age para a esquerda – e a força \vec{T}_x – componente horizontal da tração do fio sobre a carga, que age para a esquerda. Na vertical, temos a força peso \vec{P} – agindo para baixo – e a força \vec{T}_y – componente vertical para cima da tração do fio sobre a carga. Como

as cargas estão em equilíbrio, a resultante das forças que agem em cada carga é nula. Assim temos:

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow T \cos(45,0^\circ) - P = 0, \\ &\Rightarrow T \cos(45,0^\circ) = mg, \\ &\Rightarrow T = \frac{mg}{\cos(45,0^\circ)}. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 &\Rightarrow -T \sin(45,0^\circ) + F_{cd} + F_{ed} = 0 \Rightarrow T \sin(45,0^\circ) = k \frac{q^2}{d^2} + k \frac{q^2}{(2d)^2} = 5k \frac{q^2}{4d^2}, \\ &\Rightarrow q = \sqrt{\frac{4d^2 T \sin(45,0^\circ)}{5k}} = \sqrt{\frac{4d^2 mg \tan(45,0^\circ)}{5k}}, \\ &\Rightarrow q = \sqrt{\frac{4[0,300 \text{ m} \cdot \sin(45,0^\circ)]^2 0,100 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 1}{5 \cdot 8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2}}, \\ &\Rightarrow q = 0,00000198201 \text{ C} = 1,98 \mu\text{C}. \end{aligned} \quad (3)$$

b) $n = \frac{q}{e} = \frac{1,98 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = 1,2375 \cdot 10^{13} = 1,24 \cdot 10^{13}$ cargas elétricas fundamentais em excesso.

c) Como está em equilíbrio, a soma das forças atuando na carga da direita é nula.

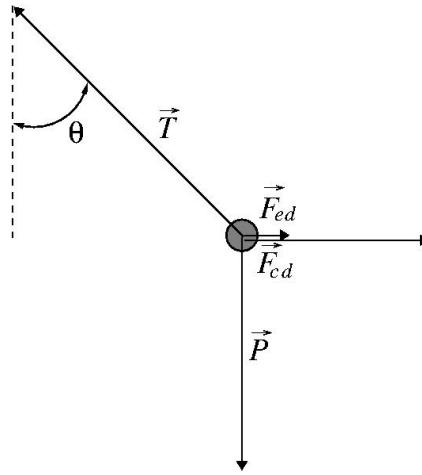


Figura 2: Diagrama de forças atuando na carga da direita.

3) [2,0 pts] Uma linha de cargas sobre o eixo Ox , de $x = 0$ a $x = a$, tem densidade de cargas dada por $\lambda(x) = \lambda_0 \frac{x}{a}$, conforme Figura 3. Determine a expressão do módulo do campo elétrico E , gerado exclusivamente por esta linha de cargas, no ponto P sobre o eixo Ox a uma distância L da origem do sistema de coordenadas, com $L > a$.

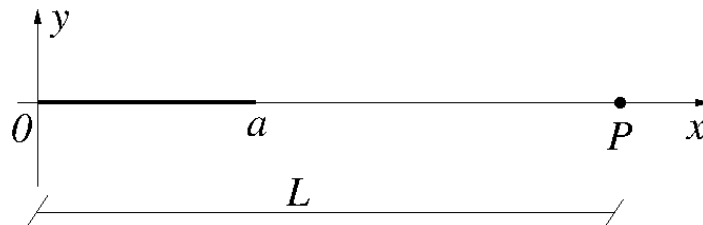


Figura 3: Questão 3.

$$\begin{aligned} \text{Resposta: } E &= \int_{L-a}^L \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(x)dx}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{L-a}^L \frac{\lambda_0 x dx}{a x^2} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 a} \int_{L-a}^L \frac{dx}{x} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 a} \ln(x) \Big|_{L-a}^L, \\ E &= \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 a} \ln\left(\frac{L}{L-a}\right). \end{aligned} \quad (4)$$

4) [3,0 pts] A Figura 4 mostra uma seção de um cilindro circular dielétrico oco, muito longo, de raio interno R_a e raio externo R_b , com $R_a < R_b$. Este cilindro tem uma distribuição volumétrica de cargas dada por $\rho(r) = \rho_0 \frac{r}{R_b - R_a}$. Determine o módulo do campo elétrico E para: **a)** $0 \leq r < R_a$, **b)** $R_a < r < R_b$ e **c)** $r > R_b$. **d)** Faça o gráfico de $E \times r$ para $0 \leq r \leq 2R_b$.

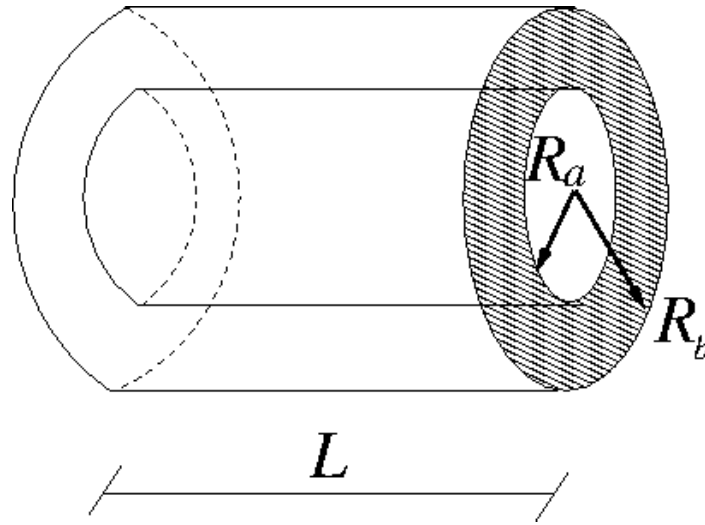


Figura 4: Questão 4.

Resposta: Por simetria, a superfície gaussiana criada é cilíndrica, cujo eixo de simetria coincide com o do cilindro dielétrico. Como o cilindro é “muito longo”, as linhas de campo que saem deste são radiais, sem componente na direção do eixo de simetria do cilindro. Desse modo, o fluxo sobre as superfícies circulares (o “tampo” e a “base” do cilindro) não apresentam fluxo, pois os vetores área e campo elétrico são perpendiculares entre si. Já a superfície lateral do cilindro pode apresentar fluxo, desde que tenha carga elétrica líquida não nula em seu interior.

a) Para $r < R_a$, temos $\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$. Mas como o cilindro é oco para $r < R_a$, $q_{int} = 0$, assim, temos $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{0}{\epsilon_0}$, logo $E = 0$.

b) Para $R_a < r < R_b$, temos $\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$. Como \vec{E} é paralelo a $d\vec{A}$, e a densidade de cargas $\rho(r)$ varia com r , temos $\Phi = E \int dA_{cil.} = \iiint \frac{\rho(r)}{\epsilon_0} dv$. Tomando um cilindro de altura L , temos:

$$\begin{aligned}
 E \int_0^{2\pi} \int_0^L dz r d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^r \int_0^L \frac{\rho(r')}{\epsilon_0} r' dz dr' d\theta, \\
 E 2\pi r L &= \int_0^{2\pi} \int_0^{R_a} \int_0^L \frac{0}{\epsilon_0} r' dz dr' d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{R_a}^r \int_0^L \frac{1}{\epsilon_0} \left(\rho_0 \frac{r'}{R_b - R_a} \right) r' dz dr' d\theta, \\
 E 2\pi r L &= 2\pi L \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{1}{R_b - R_a} \frac{r^3}{3} \Big|_{R_a}^r = \frac{2\pi L \rho_0}{3\epsilon_0} \frac{1}{R_b - R_a} (r^3 - R_a^3), \\
 E(r) &= \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{1}{R_b - R_a} \left(r^2 - \frac{R_a^3}{r} \right). \tag{5}
 \end{aligned}$$

c) Para $r > R_b$, temos:

$$\begin{aligned}
E \int_0^{2\pi} \int_0^L dz r d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^{R_b} \int_0^L \frac{\rho(r')}{\epsilon_0} r' dz dr' d\theta, \\
E 2\pi r L &= \int_0^{2\pi} \int_0^{R_a} \int_0^L \frac{0}{\epsilon_0} r' dz dr' d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{R_a}^{R_b} \int_0^L \frac{1}{\epsilon_0} \left(\rho_0 \frac{r'}{R_b - R_a} \right) r' dz dr' d\theta, \\
&\quad + \int_0^{2\pi} \int_{R_b}^r \int_0^L \frac{0}{\epsilon_0} r' dz dr' d\theta, \\
E 2\pi r L &= 2\pi L \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{1}{R_b - R_a} \frac{r^3}{3} \Big|_{R_a}^{R_b} = \frac{2\pi L \rho_0}{3\epsilon_0} \frac{1}{R_b - R_a} (R_b^3 - R_a^3), \\
E(r) &= \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{R_b^3 - R_a^3}{R_b - R_a} \frac{1}{r} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{R_b^2 + R_a R_b + R_a^2}{r}. \tag{6}
\end{aligned}$$

d) Para a Equação 5, com $r = R_a$, temos:

$$E(R_a) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{1}{R_b - R_a} \left(R_a^2 - \frac{R_a^3}{R_a} \right) = 0. \tag{7}$$

Para a Equação 5, com $r = R_b$, temos:

$$E(R_b) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{1}{R_b - R_a} \left(R_b^2 - \frac{R_a^3}{R_b} \right) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{R_b^2 + R_a R_b + R_a^2}{R_b}, \tag{8}$$

com a última expressão à direita sendo a Equação 6 aplicada em $r = R_b$.

Para $r \leq R_a$, $E = 0$. Para $R_a \leq r \leq R_b$, E cresce aproximadamente com o quadrado de r . Para $r > R_b$, E decresce com o inverso de r , conforme apresentado na Figura 5.

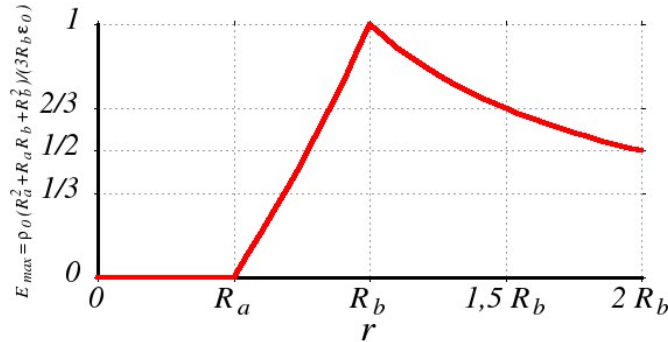


Figura 5: Gráfico do módulo do campo elétrico no cilindro da Questão 4.

$$e = \pm 1,60 \cdot 10^{-19} C \quad k = 8,99 \cdot 10^9 N \cdot m^2 / C^2 \quad \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} C^2 / N \cdot m^2 \quad q = ne$$

$$F = k \frac{q_0 q_1}{r^2} = \frac{q_0 q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad E = \frac{F}{q_0} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \vec{F} = q\vec{E} \quad \Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$dq = \lambda dx \quad dq = \rho dV \quad dV_{cil.} = r dr dz d\theta \quad \vec{P} = m\vec{g} \quad \vec{g} = -9,81 m/s^2 \hat{j}$$

$$A_{cil.}^{lat.} = 2\pi r z \quad A_{circ.} = \pi r^2 \quad E = \int \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 x^2} \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iiint \frac{\rho dV}{\epsilon_0}$$